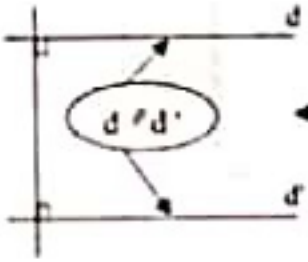
مفكرة في الرياضيات

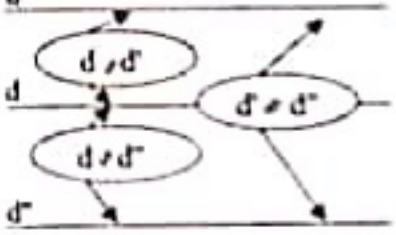
للسنة الرابعة متوسط

إثبات أن مستقيمين متوازيان

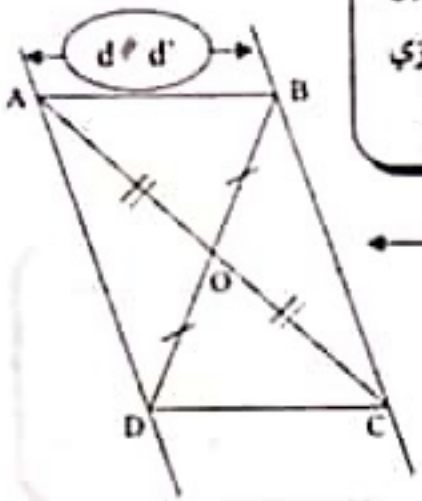
المستقيمان العموديان على نفس المستقيم متوازيان.



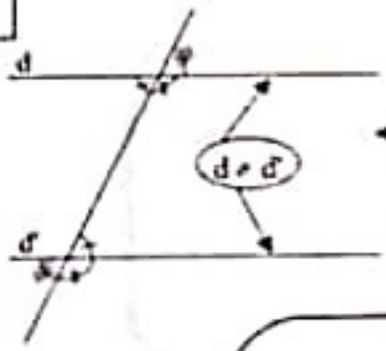
المستقيمان الموازيان لنفس المستقيم متوازيان.



حاملا كل ضلعين متقابلين في متوازي أضلاع متوازيان.



معرفة تساوي زاويتين متماثلتين داخليا أو خارجيا أو متماثلتين يمكن من القول إن مستقيمين متوازيان.



عكس نظرية طالس

d و d' مستقيمان متقاطعان في A.

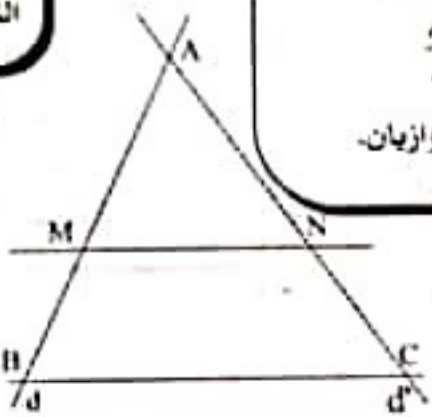
B و M نقطتان من d' متمايزتان عن A.

C و N نقطتان من d' متمايزتان عن A.

إذا كانت A، M، B و A، N، C في استقامية ونهذا الترتيب وكان

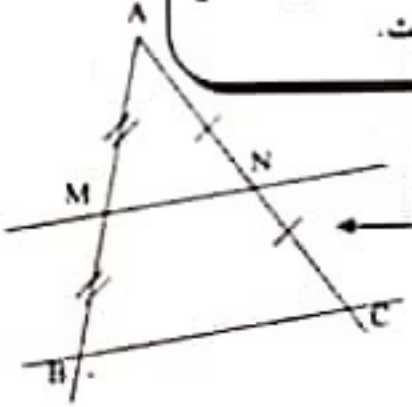
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

فإن (MN) و (BC) متوازيان.



مستقيم المنتصفين

المستقيم المار من منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث.

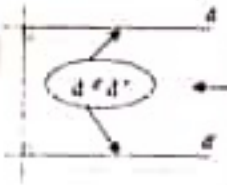


أساتذة التعليم المتوسط لولاية عنابة

إثبات أن مستقيمين متعامدان

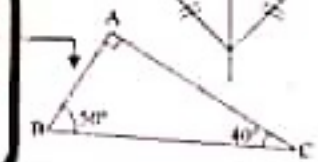
محور قطعة مستقيم عمودي عليها (في المنتصف)

المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر.

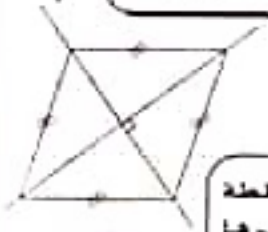


استعمال حساب الإثبات أن تقاطع مستقيمين هو زاوية قائمة.

$\hat{A} = 180° - (40° + 50°)$



الضلعان المتتاليان في مستطيل وقطرا معين متعامدين

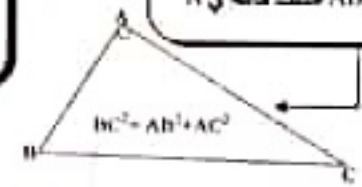


عكس نظرية فيثاغورث

ABC مثلث. إذا كان

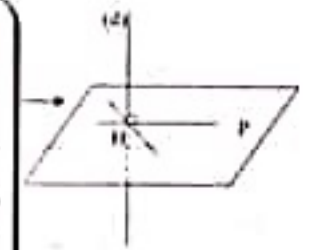
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

فإن ABC مثلث قائم في A



إذا كانت A نقطة من دائرة قطرها [BC] فإن المثلث ABC قائم في A

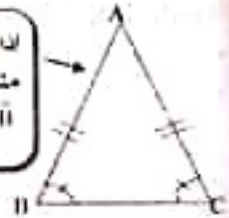
في الفضاء، المستقيم (d) عمودي على المستوي (P) في النقطة H، إذن فهو عمودي على كل مستقيم من هذا المستوي ومار من H.



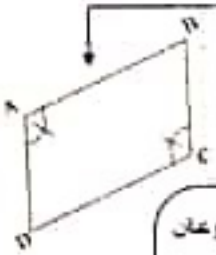
المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس مثلث ومركز ثقله عمودي على الضلع المقابل لهذا الرأس

إثبات أن زاويتين متساويتان

إذا كان المثلث ABC متساوي الساقين فإن $\hat{B}$ و $\hat{C}$ متساويان.

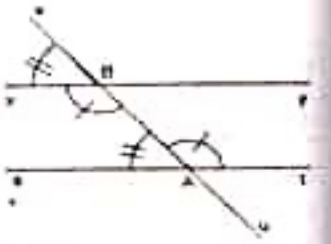


الزاويتان المتقابلتان في متوازي أضلاع متساويتين.

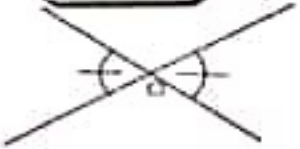


المستقيمان (x y) و (st) المقطوعان بالمستقيم (vu) متوازيين

- الزاويتان المتبادلتان داخليا $\widehat{xBu}$ و $\widehat{vAt}$ متساويتين.
- الزاويتان المتماثلتان $\widehat{vBx}$ و $\widehat{vAx}$ متساويتين.



الزاويتان المقابلتان بالرأس متساويتين.



للزاويتين نفس الـ (tan, sin) cos

$\cos\widehat{BAH} = \frac{BH}{BA}$

$\cos\widehat{BAK} = \frac{BK}{BA}$

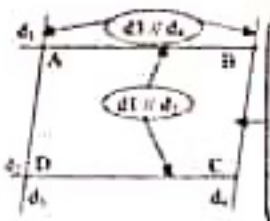
إذن $\widehat{BAH} = \widehat{BAK}$

للزاويتين نفس التممة

$\widehat{BAH} = \widehat{BCA} = (90° - \widehat{ABC})$

الزاويتان المحيطيتان اللتان تحصران نفس القوس متساويتين

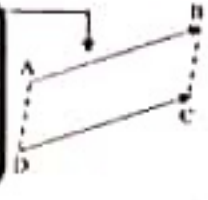
إثبات أن رباعي غير متصالب متوازي أضلاع



إذا كان في رباعي كل ضلعين متقابلين متوازيان فهو متوازي أضلاع

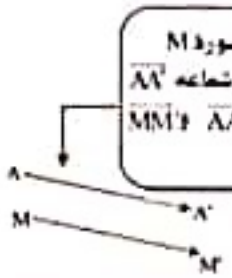
الرباعي الذي قطراه متناصفان متوازي أضلاع

إذا كانت M' صورة M بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ فإن الرباعي AMM'A' متوازي أضلاع



إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ متساويين فإن الرباعي ABCD متوازي أضلاع

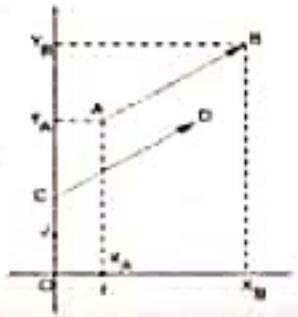
إثبات أن شعاعين متساويان



إذا كانت M' صورة M بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متساويان

إذا كان ABCD متوازي أضلاع فإن الشعاعين $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB}$ متساويان

إذا كانت M منتصف [AB] فإن الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MB}$ متساويان



في معلم الشعاعان اللذان لهما نفس الإحداثيتين متساويان

الحساب العددي

الأعداد الطبيعية

- a و b عددان أوليان فيما بينهما معناه أن قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.
- حساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين باستعمال خوارزمية إقليدس.

حاصل القسمة		1	1	2	2
القاسم	924	539	385	154	77
المقسوم	385	154	77	0	
الباقي					

77 هو آخر باقي غير معدوم ← نستنتج أن ← PGCD (924,539) = 77

- حساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين باستعمال عمليات الطرح المتتالية

924 − 539 = 385 ومنه PGCD (924, 539) = PGCD (539 ; 385)
539 − 385 = 154 ومنه PGCD (539, 385) = PGCD (385 ; 154)
385 − 154 = 231 ومنه PGCD (385, 154) = PGCD (231 ; 154)
281 − 154 = 77 ومنه PGCD (281, 154) = PGCD (154 , 77)
154 − 77 = 77 ومنه PGCD (1545,77) = PGCD (77 ; 77) = 77

نستنتج أن: PGCD (924; 539) = 77

الكسور

- الأعداد a , b , c , d غير معدومة.

$\frac{a}{b} = a : b$ | $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a : k}{b : k}$ | $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ | $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ | $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$

- a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$.

الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال يعني a و b أوليان فيما بينهما.

$\frac{17}{23}$ غير قابل للاختزال (17 و 23 أوليان فيما بينهما)

- عندما نقسم كلا من حدي كسر على الـ PGCD لبسطه ومقامه نحصل على كسر غير قابل للاختزال.

مثال:

بما أن PGCD(504, 396) = 36 فإن: $\frac{504}{396} = \frac{504:36}{396:36} = \frac{14}{11}$

وعليه الكسر $\frac{14}{11}$ غير قابل للاختزال.

أساتذة التعليم المتوسط لولاية عنابة

الحساب على الجذور

a و b عددان موجبان

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$ $\quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\quad \sqrt{a^2} = a$ $\quad (\sqrt{a})^2 = a$ $\quad \sqrt{a} \geq 0$

القوى

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots\ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$ $\quad a^1 = a$ $\quad a^2 = a \times a$ $\quad a^3 = a \times a \times a$ $\quad a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$ $\quad (a^m)^n = a^{m \times n}$ $\quad a^m \times a^n = a^{m+n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$ $\quad (ab)^n = a^n \times b^n$

قوى 10: $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ $\quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

مثال: $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$

الكتابة العلمية

الكتابة العلمية لعدد موجب تماما هي كل كتابة من الشكل $a \times 10^n$ حيث: $1 \leq a < 10$

مثال: $18,92 = 1,892 \times 10^1$; $0,00071 = 7,1 \times 10^{-4}$

الحساب الحرفي

الجداءات الشهيرة

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

مثال:

$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

$(5x-3)^2 = 25x^2 - 30x + 9$

$(4x+7)(4x-7) = 16x^2 - 49$

نشر وتحليل عبارة

- نشر عبارة يعني كتابتها على شكل مجموع وذلك باستعمال التوزيع أو إحدى المتطابقات الشهيرة

مثال:

$x(x-y) = x^2 - xy$

$(2x-3)(x+2) = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x^2 + x - 6$

$(3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$

- تحليل عبارة يعني كتابتها على شكل جداء.

مثال:

$(x+1)(3x-5) - (x+1)(2x+7) = (x+1)[(3x-5) - (2x+7)] = (x+1)(x-12)$

$x^2 + 4x = x(x+4)$

$4x^2 - 81 = (2x-9)(2x+9)$

المعادلات والمتراجحات

- حل معادلة أو متراجحة بمجهول واحد x هو البحث عن جميع قيم x التي من أجلها تكون المساواة أو المتباينة محققة

نوع المعادلة	$(ax+b)(cx+d) = 0$ مع $a \neq 0$ ، $c \neq 0$	$ax+b = cx+d$ مع $a \neq c$	$ax+b = 0$ مع $a \neq 0$
الحلول	$-\frac{b}{a}$ و $-\frac{d}{c}$	$\frac{d-b}{a-c}$	$-\frac{b}{a}$

مثال:

للمعادلة $7x + 1 = x - 2$ حل وحيد هو $x = -\frac{1}{2}$

للمعادلة $(x-1)(2x+5) = 0$ حلين هما $x = -\frac{5}{2}$ و $x = 1$

أساتذة التعليم المتوسط لولاية عنابة

تربيق مسألة

لحل مسألة يجب:

- اختيار المجهول.
- صياغة المسألة في شكل معادلة أو متراجحة
- حل المعادلة أو المتراجحة
- التحقق ثم الاستخلاص.

- لحل متراجحات نستعمل الخواص المتعلقة بالترتيب أو قسمة طرفي متباينة

إذا كان $a > b$ فإن $a+c > b+c$

إذا كان $a > b$ فإن $a-c > b-c$

إذا كان $a > b$ فإن $a \times c > b \times c$ $(c > 0)$

إذا كان $a > b$ فإن $a+c > b+c$ $(c > 0)$

إذا كان $a > b$ فإن $a \times c < b \times c$ $(c < 0)$ (تغير جهة المتباينة)

إذا كان $a > b$ فإن $a+c < b+c$ $(c < 0)$ (تغير جهة المتباينة)

مثال:

$-4x+1 < 3x+5$ أي $-4x-3x < 5-1$ ومنه $-7x < 4$

وعليه $x > -\frac{4}{7}$

حلول المتراجحة هي كل الأعداد x الأكبر تماما من $-\frac{4}{7}$

التمثيل البياني:

التناسبية

النسبة المئوية

	يؤول إلى ضرب x بالعدد	أمثلة
حساب a % من كمية x	$\frac{a}{100}$	ثمن كتاب 180DA، خفض بـ 20% قيمة التخفيض هي: $\frac{20}{100} \times 180 = 36$ DA
زيادة عدد x بـ a %	$1+\frac{a}{100}$	ثمن كتاب 180DA، ارتفع سعره بـ 15% – سعره الجديد هو: $(1+\frac{15}{100}) \times 180 = 207$ DA
خفض عدد x بـ a %	$1-\frac{a}{100}$	ثمن كتاب 180DA، انخفض سعره بـ 10% سعره الجديد هو: $\left(1-\frac{10}{100}\right) \times 180 = 162$ DA

الإحصاء

النقطة	x_1 11	x_2 13	x_3 14	x_4 15	x_5 16	x_6 18
التكرار	n_1 3	n_2 7	n_3 3	n_4 4	n_5 6	n_6 2

- التكرار الكلي N هو مجموع التكرارات.

$N = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$N = 3 + 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2 = 25$

- F_i تواتر القيمة n_i هو:

$F_i = \frac{n_i}{N}$ (أو $\frac{n_i \times 100}{N}\%$)

- مجموع التواترات يساوي 1 أو 100%

$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots = 1$ (أو 100 %)

الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots\dots\dots}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{11\times3+13\times7+\dots\dots+18\times2}{25}$$

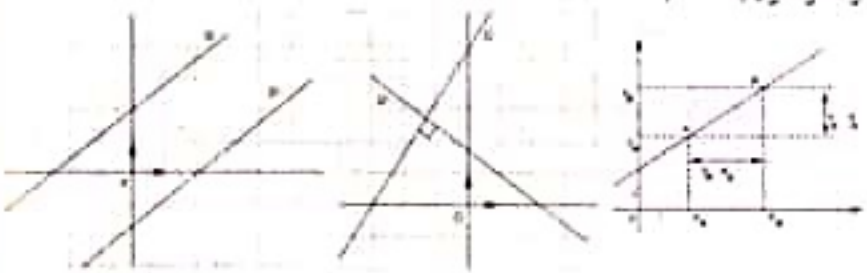
$$\bar{x} = 14,32$$

- في حالة سلسلة إحصائية مجمعة في فئات فإن الوسط الحسابي هو مجموع مراكز الفئات على عدد الفئات.
- وسيط سلسلة مرتبة هو القيمة التي تجعل عدد القيم الأصغر منها أو يساويها مساويا لعدد القيم الأكبر منها أو يساويها.
- النقطة الوسيطية في هذه السلسلة هي 14.
- في حالة سلسلة مجمعة في فئات تبحث عن الفئة التي تنتمي إليها القيمة الوسيطية
- مدى سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لها

مدى هذه السلسلة هو: 7 (7-11-18)

الدالة التآلفية

- $x \longmapsto ax + b$ دالة تآلفية تمثيلها البياني هو المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$
- $x \longmapsto ax$ دالة خطية تمثيلها البياني هو المستقيم ذو المعادلة $y = ax$
- معامل توجيه المستقيم (AB) الذي معادلته $y = ax + b$ هو العدد a حيث: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ و b هو الترتيب عند المبدأ.



D معامل توجيه a
D' معامل توجيه a'
D // D' يعني
a = a' فإن

D معامل توجيه a
D' معامل توجيه a'
D ⊥ D' يعني
aa' = -1 فإن

جملة معادلتين من الدرجة الأول بمجهولين

هناك طريقتان لحل الجملة: $(S)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

باستعمال طريقة الحل بالتعويض فإن الجملة $(S)\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} y = 3x - 4 \\ x + 2(3x - 4) = -1 \end{cases}$

ومنه حلول (S): $x = 1$ و $y = -1$

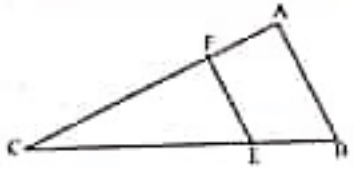
باستعمال طريقة الحل بالجمع فإن الجملة $(S)\begin{cases} 3x + y = 57 \\ 5x + 3y = 107 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

تكافئ $(S)\begin{cases} (-3\times3+5)x = -3\times57+107 \\ (5-3\times3)y = 5\times57-3\times107 \end{cases}$

الجملة (S) محققة لما $\begin{cases} -4x = -64 \\ -4y = -36 \end{cases}$ ومنه حلول (S): $x = 16$ و $y = 9$

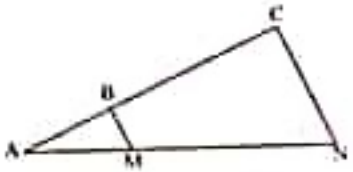
طالس - فيثاغورث

تعليمية نظرية طالس عكس المثلث



- إذا كان $F \in (AC)$ و $E \in (BC)$ وكان: $\frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{FE}{AB}$ فإن: (AB)//(FE)

النظرية العكسية



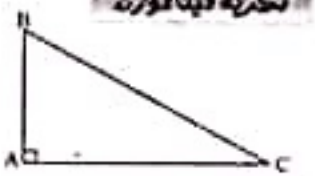
- ليكن $B \in (AC)$ و $M \in (AN)$
- إذا كانت A , B , C من جهة و A , M , N من جهة أخرى.

بهذا الترتيب في استقامة وكان: $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}$

فإن: (BM) // (CN)

أساتذة التعليم المتوسط لولاية عنابة

نظرية فيثاغورث



إن كان ABC مثلث قائم في A فإن: $BC^2=AB^2+AC^2$.

النظرية العكسية

- إذا كان في مثلث ABC و $BC^2=AB^2+AC^2$

فإن هذا المثلث قائم في A.

المسافة، الإحداثيات

- في معلم متعامد ومتجانس المسافة بين A و B هي: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

- في معلم إحداثيا M منتصف [AB] هما: $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ و $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

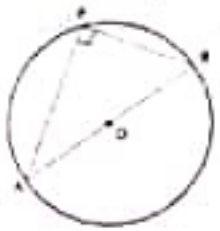
- في معلم إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

الدائرة المحيطة بمثلث قائم

- الدائرة المحيطة بمثلث قائم مركزها منتصف وتر هذا المثلث.

- A و B نقطتان متمايزتان

إذا كانت F نقطة مختلفة عن A و B وتنتمي إلى الدائرة التي قطرها [AB] فإن ABF مثلث قائم في F.



الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في دائرة

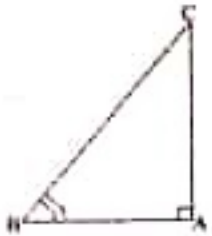
$\widehat{BAD}=\widehat{BCD}$

- في دائرة كل الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس متقايسة

$\widehat{BAM}=\frac{1}{2}\widehat{BOM}$

- قيس زاوية محيطية في دائرة هو نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر معها نفس القوس

النسب المثلثية في مثلث قائم



$\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}$; $\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}$; $\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}$

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

التحويلات

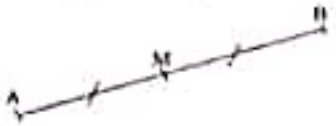
التناظر المحوري

- A و B متناظرتان بالنسبة إلى d

- d محور [AB]

التناظر المركزي

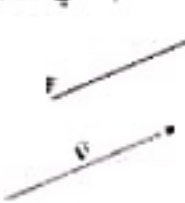
- A و B متناظرتان بالنسبة إلى M



- M منتصف [AB]

الإنسحاب

- M صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}$



$\overrightarrow{FM}=\vec{V}$

الدوران

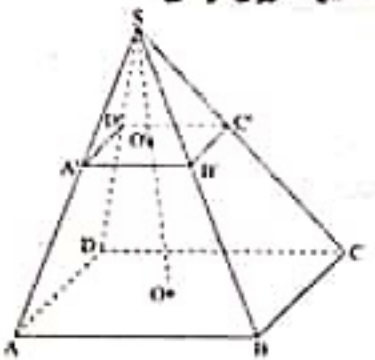
- M صورة F بالدوران الذي مركزه O وزاويته $100°$ في الاتجاه السالب

$OF=OM$

$\widehat{FOM}=100°$

أساتذة التعليم المتوس

مقطع مخروط أو هرم



- في تكبير أو تصغير معامله k نضرب المساحات في k^2 والحجوم في k^3.
- الهرم SA'B'C'D' المحصل عليه بقطع الهرم SABCD بمستو مواز لقاعدته هو تصغير للهرم SABCD معامله $k = \frac{SO'}{SO}$

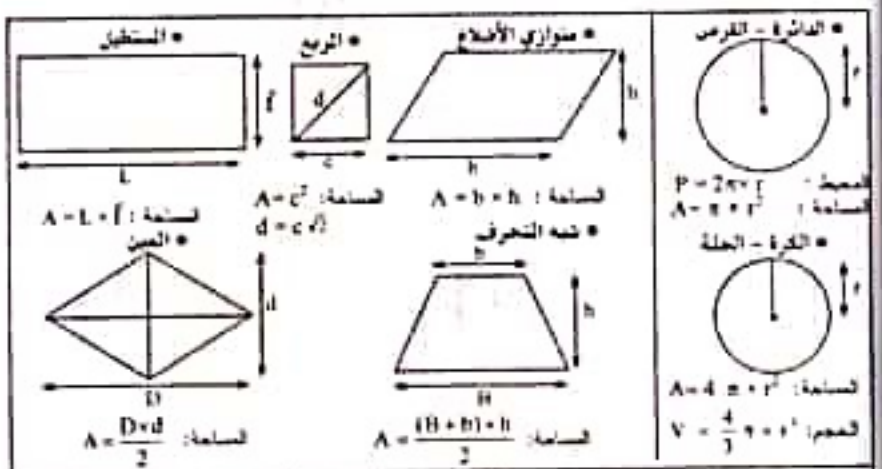
إذن: $V(SA'B'C'D') = \left(\frac{SO'}{SO}\right)^3 \times V(SABCD)$

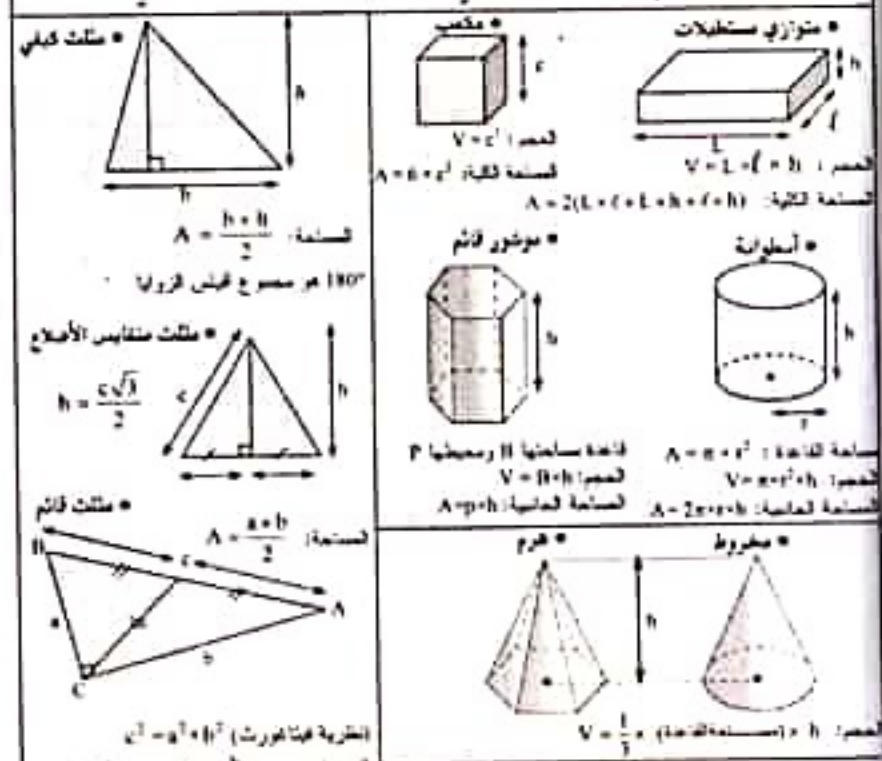
المسافة (d) ، السرعة (V) ، المدة (t)

$$d = vt \qquad v = \frac{d}{t} \qquad t = \frac{d}{v}$$

المسافة (d)	الزمن (t)	السرعة (v)
Km	h	km/h
m	s	m/s

قواعد هندسية


• الدائرة – القرص
المحيط: $P = 2\pi \times r$
المساحة: $A = \pi \times r^2$
• الكرة – الحلة
المساحة: $A = 4\pi \times r^2$
الحجم: $V = \frac{4}{3}\pi \times r^3$
• متوازي الأضلاع
المساحة: $A = b \times h$
• المربع
المساحة: $A = c^2$
$d = c\sqrt{2}$
• المستطيل
المساحة: $A = L \times \ell$
• شبه المنحرف
المساحة: $A = \frac{(B+b)\times h}{2}$
• المعين
المساحة: $A = \frac{D \times d}{2}$


• متوازي مستطيلات
الحجم: $V = L \times \ell \times h$
المساحة الكلية: $A = 2(L \times \ell + L \times h + \ell \times h)$
• مكعب
الحجم: $V = c^3$
المساحة الكلية: $A = 6 \times c^2$
• أسطوانة
مساحة القاعدة: $A = \pi \times r^2$
الحجم: $V = \pi \times r^2 \times h$
المساحة الجانبية: $A = 2\pi \times r \times h$
• موشور قائم
قاعدة مساحتها B ومحيطها P
الحجم: $V = B \times h$
المساحة الجانبية: $A = p \times h$
• مخروط
الحجم: $V = \frac{1}{3} \times$ (مساحة القاعدة) $\times h$
• هرم
• مثلث كيفي
المساحة: $A = \frac{b \times h}{2}$
180° هو مجموع قياس الزوايا
• مثلث متقايس الأضلاع
$h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$
• مثلث قائم
المساحة: $A = \frac{a \times b}{2}$
(نظرية فيثاغورث) $c^2 = a^2 + b^2$
$\sin \hat{A} = \frac{a}{c}$ $\cos \hat{A} = \frac{b}{c}$ $\tan \hat{A} = \frac{a}{b}$

طول AB قطعة مستقيم: [AB] رموز هندسية
شعاع $\overrightarrow{AB}$ مستقيم: (AB) يوازي: //