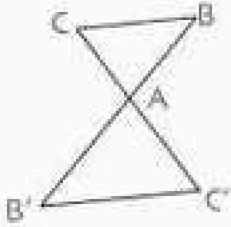
معارف

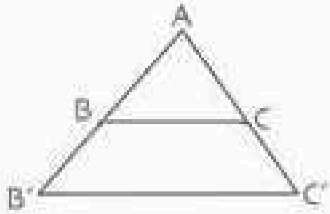
1 - نظرية طالس

نظرية (d) و (d') هما مستقيمان متقاطعان في النقطة A.
B و B' هما نقطتان من (d) تختلفان عن A. C و C' هما نقطتان من (d') تختلفان عن A.
إذا كان المستقيمان (d) و (d') متوازيين فإن $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

ملاحظة المثلثان ABC و AB'C' معينان بمستقيمين متقاطعين يقطعهما مستقيمان متوازيان. نقول أنهما مثلثان في وضعية طالس.



• (BC) يوازي (B'C').
• $\widehat{CAB}$ و $\widehat{C'AB'}$ متقابلتان بالرأس.



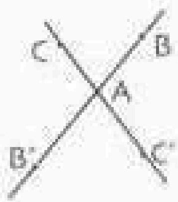
• (BC) يوازي (B'C')
• $\hat{A}$ زاوية مشتركة.

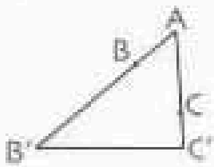
حسب نظرية طالس لدينا $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

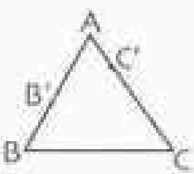
نكتب اسماء المثلثين منظمة كالتالي : $\boxed{\begin{matrix} A \\ A \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} B' \\ B \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} C' \\ C \end{matrix}}$ و ينتج جدول التناسبية الآتي :

$B'C'$	AC'	AB'
BC	AC	AB

نقول عن النقط A، B، B' من جهة و عن النقط A، C، C' من جهة أخرى أنها بنفس الترتيب على مستقيمين في الوضعيات المقابلة :







2 - النظرية العكسية لنظرية طالس

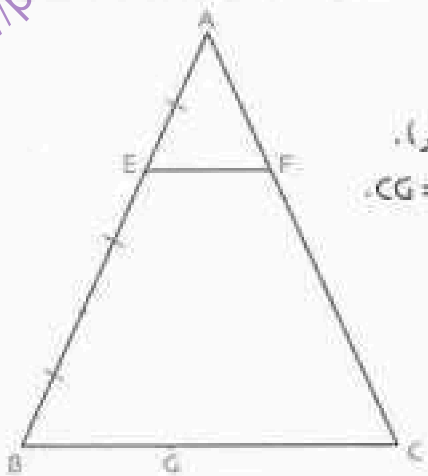
نظرية (d) و (d') هما مستقيمان متقاطعان في النقطة A.
B و B' هما نقطتان من (d) تختلفان عن A. C و C' هما نقطتان من (d') تختلفان عن A.
إذا كان $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ و كانت النقط A، B، B' و النقط A، C، C' مرتبة بنفس الترتيب
فإن المستقيمين (d) و (d') متوازيان.

ملاحظة من المهم أن تكون النقط على استقامة واحدة بنفس الترتيب في المثال التالي : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{2}$
نلاحظ أن A، B، B' على استقامة واحدة و النقط A، C، C' على استقامة واحدة كذلك.
هذه النقط ليست مرتبة بنفس الترتيب. إذن المستقيمان (BC) و (B'C') ليسا متوازيين.

طرائق

1 -إثبات توازي مستقيمين

طريقة لإثبات توازي مستقيمين، يمكن تطبيق النظرية العكسية لنظرية لطالس.



تمرين لاحظ الشكل المقابل.

(EF) يوازي (BC) و $AB = 3AE$، (وحدة الطول هي السنتيمتر).

تعطى : $AE = 2$ ؛ $BC = 6$ ؛ $EF = 2$ و $AF = 2$ و $CG = 2BG$.

1 . احسب الأطوال AB، AC و BC.

2 . برهن أن (FG) يوازي (AB).

3 . هل (EG) يوازي (AC) ؟

حل

1 . نعلم أن $AE = 2$ و $AB = 3AE$ إذن $AB = 6$.

نلاحظ أن المثلثين AEF و ABC في وضعية طالس.

نعين إذن جدول تناسبية لأضلاع المثلثين AEF و ABC.

A	E	F
A	B	C

AE	AF	EF
AB	AC	BC

ينتج أن : $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

من المساويتين $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$ و $AF = 2$ ينتج أن $AC = 3AF$ و بالتالي : $AC = 6$

من المساويتين $\frac{EF}{BC} = \frac{1}{3}$ و $EF = 2$ ينتج أن $BF = 3EF$ و بالتالي : $BC = 6$

$CF = CA - AF = 4$ و $CG = \frac{2}{3}BC$ إذن $CG = 4$

2 . لدينا : $\frac{CF}{CA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ و $\frac{CG}{CB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ إذن : $\frac{CF}{CA} = \frac{CG}{CB}$

بما أن النقط C، F، A من (AC) و B، G، C من (BC) مرتبة بنفس الترتيب

فإن (FG) يوازي (AB) (حسب النظرية العكسية لنظرية طالس).

3 . لدينا : $BE = AB - AE$ إذن $BE = 4$. $BG = BC - CG$ أي $BG = 2$

$\frac{BE}{BA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ و $\frac{BG}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

و النقط A، E، B من (AB) و C، G، B من (BC) مرتبة بنفس الترتيب.

بما أن $\frac{BE}{BA} \neq \frac{BG}{BC}$ فإن (EG) لا يوازي (AC).

2 -تقسيم قطعة مستقيم

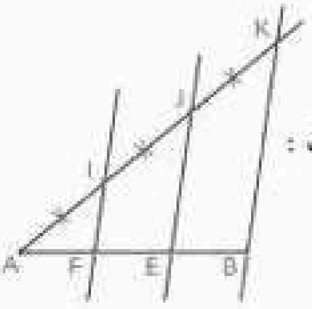
طريقة

لتقسيم قطعة مستقيم يمكن إستعمال نظرية طالس.

تمرين 1 [AB] قطعة مستقيم.

• قسم القطعة [AB] إلى ثلاثة قطع متقايسة. استعمل فقط مسطرة غير مدرجة و مدور.

حل



• نرسم القطعة [AB].

• نرسم نصف مستقيم يشمل A.

• نمثل على نصف المستقيم النقط I، J، K بهذا الترتيب بدءا من A حيث :
$AI = IJ = JK$.

• نرسم المستقيم (KB) ثم المستقيمات الموازية له و التي تشمل J و I.
يقطع هذان المستقيمان المستقيم (AB) في E و F على الترتيب.

لدينا : I منتصف [AJ] إذن F منتصف [AE] (مستقيم المنتصفين).

بتطبيق نظرية طالس ينتج أن : $\frac{AF}{AB} = \frac{AI}{AK} = \frac{1}{3}$ و $\frac{AJ}{AK} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$

و بالتالي $AB = 3AF$ و $AF = FE$ ؛ $AE = \frac{2}{3}AB$ و $EB = AB - AE = \frac{1}{3}AB$

إذن $AF = FE = EB$.

تمرين 2 [AB] قطعة مستقيم.

• ضع نقطة M على القطعة [AB] أو من حاملها وخارج [AB] حيث $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$
(إستعمل المسطرة غير المدرجة و المدور).

حل

• نرسم مستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) متوازيين و يشملان A و B على الترتيب و مدرجين بتدريج منتظم بنفس الوحدة.

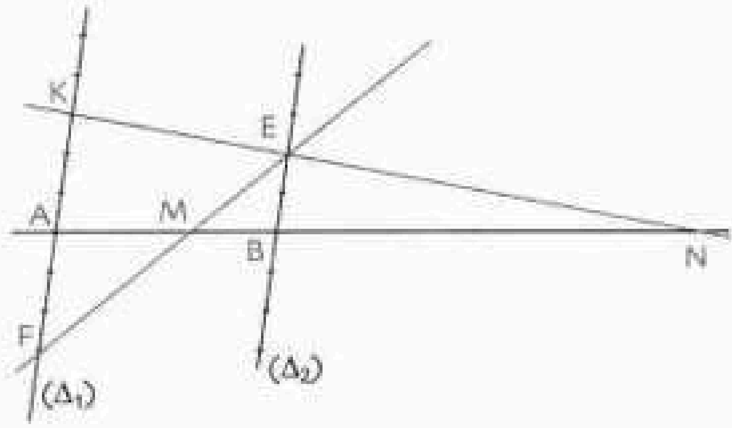
للحصول على وضعة طالس يكفي تعيين نقطة E على (Δ_2) بحيث $BE = 2$
و نقطتين K و F على (Δ_1) بحيث $AK = AF = 3$.

لدينا : (EF) يقطع (AB) في M و (KE) يقطع (AB) في N. بتطبيق خاصية طالس ينتج أن :

$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ و $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$

و بالتالي M نقطة من [AB] و N نقطة خارجها.

و هما النقطتان اللتان تقسمان القطعة [AB] في النسبة $\frac{3}{2}$.



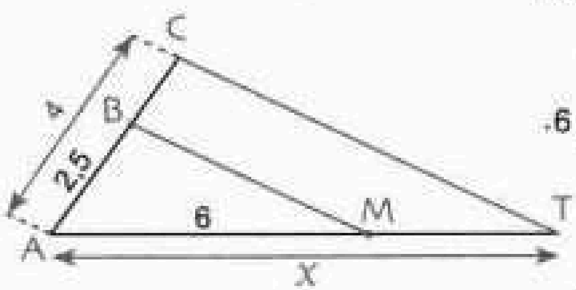
ملاحظة • في كل من الحالتين السابقتين، M و N قريبتان من B أكثر من A مع N خارج [AB] و من جهة B لأن $\frac{3}{2} > 1$.
• إذا كانت النسبة أصغر من 1، نتبع نفس المراحل و تكون النقطتان M و N قريبة من A أكثر من B.
N خارج [AB] من جهة A.
• إذا كانت النسبة تساوي 1 فإنه توجد نقطة وحيدة M و هي منتصف [AB].

3 - إنشاء قطعة مستقيم طولها رابع متناسب

طريقة لإنشاء قطعة مستقيم يكون طولها رابع متناسب لثلاثة أعداد موجبة يمكن إستعمال نظرية طالس.

تمرين وحدة الطول هي السنتيمتر.
[AB]، [AC] و [AM] ثلاث قطع أطوالها p، q، r على الترتيب بحيث $p = 2{,}5$ ، $q = 4$ و $r = 6$.
• احسب AT.
• أنشئ قطعة طولها x حيث $px = qr$ ثم تحقق بالحساب وبالقياس.

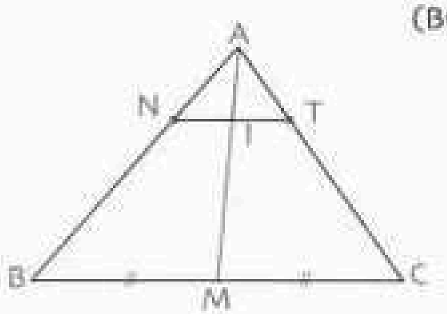
حل لدينا $px = qr$ يعني $\frac{p}{q} = \frac{r}{x}$ (أي $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{x}$)
التناسب $\frac{p}{q} = \frac{r}{x}$ يكتب على الشكل $\frac{2{,}5}{4} = \frac{6}{x}$
• نلاحظ أن x هو الرابع المتناسب للأعداد 2,5 ؛ 4 و 6.
نرسم مثلثين في وضعية طالس (الشكل).



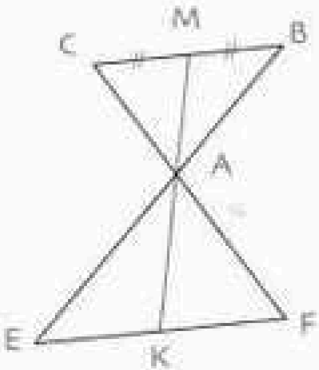
لدينا (CT) يوازي (BM) و ينتج أن $x = AT$.
باستعمال الحساب، يكفي حل المعادلة $2{,}5x = 4 \times 6$
حل هذه المعادلة هو العدد 9,6.
للتحقق باستعمال القياس، يكفي إنجاز قياس هذه القطعة بمسطرة مدرجة و الحصول على قيمة مقربة للطول x.

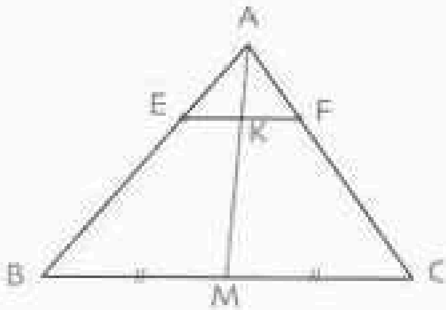
تمرين محلول

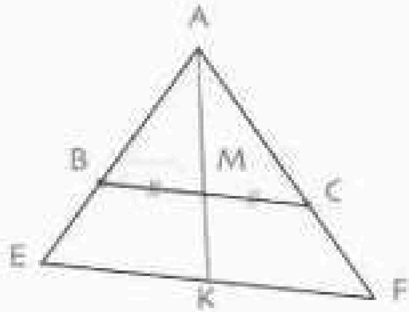
تمرين ABC و AFE مثلثان في وضعية طالس حيث A، B، E نقط من نفس المستقيم.
- برهن أن الرأس المشترك و منتصفي الضلعين المتوازيين هي ثلاث نقط على استقامة واحدة.
- في الشكل المقابل، لدينا المستقيم (NT) يوازي (BC) و BC = 4 cm و NT = 1,5 cm.
احسب NI.



حل • الأشكال التالية توضح الحالات الممكنة للوضعية المطروحة و هي وضعيتا زاوية مشتركة و وضعية زاويتين متقابلتين بالرأس.







في هذه الحالات، الرأس المشترك هو النقطة A. الضلعان المتوازيان هما [BC] و [EF].
ليكن M منتصف [BC] و P منتصف [EF]. للبرهان على أن النقط الثلاث على استقامة واحدة يكفي البرهان على أن النقطة P تقع على المستقيم (AM).
إذن لنبرهن أن المستقيم (AM) يشمل P منتصف [EF]، أي أن (AM) يقطع [EF] في منتصفه P.
ليكن K نقطة تقاطع (AM) مع (EF).

المثلثان AMB و AKE في وضعية طالس. إذن $\frac{AM}{AK} = \frac{AB}{AE} = \frac{MB}{KE}$

المثلثان AMC و AKF في وضعية طالس. إذن $\frac{AM}{AK} = \frac{AC}{AF} = \frac{MC}{KF}$. ينتج أن $\frac{MB}{KE} = \frac{MC}{KF}$

و بما أن MB = MC فإن KE = KF. ينتج أن K منتصف [EF] أي أنها النقطة P.
وبالتالي النقط A، M، P على استقامة واحدة.

- حسب النتيجة السابقة، فإن المتوسط المتعلق بالضلع [BC] في المثلث ABC هو المتوسط المتعلق بالضلع [NT] في المثلث ANT.
إذن I منتصف NT. و بالتالي NI = 0,75 cm.