معارف

1 - المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين - حل معادلة بمجهولين

أ) المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين

أمثلة
- المعادلة $3x - 2y - 1 = 0$ هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.
- المعادلة $-4x + y = 0$ هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.

ملاحظة: يمكن كتابة المعادلة $3x - 2y - 1 = 0$ كما يلي: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

و المعادلة $-4x + y = 0$ كما يلي: $y = 4x$

ب) حل معادلة بمجهولين

أمثلة
1. $x - 2y - 3 = 0$ هي معادلة بمجهولين x و y.

- عندما نعوض x بالعدد 1 و y بالعدد -1 نحصل على: $1 - 2(-1) - 3 = 0$

أي نحصل على مساواة صحيحة، كذلك من أجل $x = 3$ و $y = 0$ نحصل على مساواة صحيحة.
- عندما نعوض x بالعدد 0 و y بالعدد 1 نحصل على مساواة غير صحيحة لأن $0 - 2\times1 - 3 \neq 0$

نقول أن كلا من الثنائيتين $(1 ; -1)$ و $(3 ; 0)$ هي حل للمعادلة $x - 2y - 3 = 0$

و أن الثنائية $(0 ; 1)$ ليست حلا للمعادلة $x - 2y - 3 = 0$.

2 - جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

أ) جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

مثال: كل من المعادلتين $4x - 3y + 1 = 0$ و $-2x + y - 5 = 0$ هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين.

نقول عن كل ثنائية تحقق المعادلتين معا أنها حل للجملة: $\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ -2x + y - 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ -2x + y - 5 = 0 \end{cases}$ هي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.

الثنائية $(-9 ; -7)$ تحقق كلا من المعادلتين. إذن الثنائية $(-9 ; -7)$ هي حل للجملة.

الثنائية $\left(\frac{1}{3} ; 0\right)$ تحقق المعادلة $4x - 3y + 1 = 0$ و لا تحقق المعادلة $-2x + y - 5 = 0$

إذن الثنائية $\left(\frac{1}{3} ; 0\right)$ ليست حلا للجملة.

ب) حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف: حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y يعني إيجاد كل الثنائيات $(x ; y)$ التي تحقق المعادلتين معا.

مثال: حل الجملة
$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 & (1) \\ 2x + 3y + 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

يمكن كتابة هذه الجملة على الشكل
$$\begin{cases} 2x - 2y - 6 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 2x = 2y + 6 \\ 2x = -3y - 4 \end{cases}$$

ينتج أن $2y + 6 = -3y - 4$ و هذه معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد y.
هذه المعادلة تقبل حلا واحدا هو $y = -2$. بتعويض y بالعدد -2 في المعادلة (1) نحصل على معادلة ذات مجهول واحد x هي : $x - (-2) - 3 = 0$ هذه المعادلة تقبل حلا واحدا هو $x = 1$.
إذن الجملة تقبل حلا واحدا هو الثنائية $(1 ; -2)$.

التحقيق: نعوض x بالعدد 1 و y بالعدد -2 في كل من المعادلتين و نجد
$$\begin{cases} 1 - (-2) - 3 = 0 \\ 2\times1 + 3(-2) + 4 = 0 \end{cases}$$
كل من المساوتين صحيحة.

جـ) التفسير البياني لحل جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

مثال: الجملة
$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$$
تقبل حلا واحدا هو $(1 ; -2)$ أي $x = 1$ و $y = -2$

يمكن كتابة الجملة على الشكل التالي
$$\begin{cases} y = x - 3 & (1) \\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} & (2) \end{cases}$$

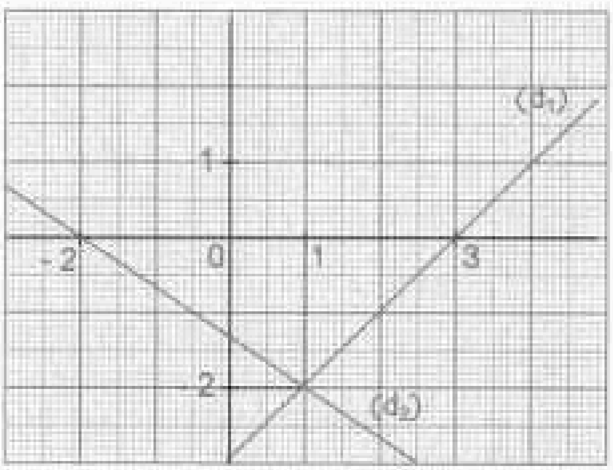
المستوي مزود بمعلم، المعادلة (1) تمثل بالمستقيم (d_1)
المعادلة (2) تمثل بالمستقيم (d_2)،
الجملة تمثل بالمستقيمين (d_1) و (d_2).

(1)

x	y
1	-2
3	0

(2)

x	y
1	-2
-2	0



يشترك المستقيمان (d_1) و (d_2) في نقطة وحيدة إحداثياها $(1 ; -2)$. إذن المستقيمان (d_1) و (d_2) متقاطعان. إحداثيا نقطة تقاطعهما هو الحل الوحيد للجملة.

طرائق

حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

طريقة لحل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين يمكن استعمال طريقة التعويض أو طريقة الجمع.
كل من الطريقتين تعتمد على حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

تمرين حل الجملة
$$\text{Ⓐ}\begin{cases} -4x + y = -5 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

حل

أ) الحل بطريقة التعويض

• نرقم المعادلتين $\begin{cases} -4x + y = -5 & ① \\ -2x + 3y = 1 & ② \end{cases}$ • يمكن كتابة الجملة على الشكل $\begin{cases} y = 4x - 5 & ③ \\ -2x + 3y = 1 & ② \end{cases}$

المعادلة ③ تعبر عن المجهول y بدلالة المجهول x.

• نعوض y بالعبارة $(4x - 5)$ في المعادلة ② فنتحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x.

$-2x + 3(4x - 5) = 1$ أي $10x = 16$. هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $x = \frac{8}{5}$

• نعوض x بالعدد $\frac{8}{5}$ في المعادلة ① فنجد $y = \frac{7}{5}$.

• نستنتج أن الجملة Ⓐ تقبل حلا واحدا هو $\left(\frac{8}{5} ; \frac{7}{5}\right)$.

ب) الحل بطريقة الجمع $\begin{cases} -4x + y = -5 & ① \\ -2x + 3y = 1 & ② \end{cases}$

• يمكن كتابة المعادلة ② على الشكل $-4x - 6y = -2$ (بضرب طرفيها في العدد -2)

فتكتب الجملة على الشكل $\begin{cases} -4x + y = -5 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$ نعلم أن $4x$ و $-4x$ متعاكسان إذن $-4x + 4x = 0$

• نجمع المعادلتين طرفًا لطرف فنتحصل بعد التبسيط على المعادلة : $-5y = -7$ و هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد y.

• هذه المعادلة تقبل حلا واحدا هو $y = \frac{7}{5}$. لحساب x نعوض y بـ $\frac{7}{5}$ في إحدى المعادلتين.

و نجد $x = \frac{8}{5}$. • إذن للجملة حل وحيد هو $\left(\frac{8}{5} ; \frac{7}{5}\right)$.

التحقيق $-4 \times \frac{8}{5} + \frac{7}{5} = -\frac{32}{5} + \frac{7}{5} = -\frac{25}{5} = -5$ ؛ $-2 \times \frac{8}{5} + 3 \times \frac{7}{5} = -\frac{16}{5} + \frac{21}{5} = \frac{5}{5} = 1$

ملاحظة ضربنا طرفي المعادلة ② في العدد -2 قصد الحصول على معادلة بمجهول واحد.
يمكن ضرب طرفي المعادلة ① في -3 و عند الجمع طرفًا لطرف نحصل على معادلة بمجهول واحد x.

تمارين محلولة

تمرين 1 اشترى كل من رضا و سمير أقلاما و كراريس.

اشترى رضا 3 أقلام و كراستين بثمن 85 دينارا و اشترى سمير قلمين و 7 كراريس بثمن 170 دينارا.

• احسب ثمن الكراس الواحد وثمن القلم الواحد.

حل

• إختيار المجاهيل

نضع x هو ثمن القلم الواحد و y هو ثمن الكراس الواحد.

• وضع معادلات

من المعطيات نتحصل على : $3x + 2y = 85$ و $2x + 7y = 170$.

إذن نتحصل على جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 85 & (1) \\ 2x + 7y = 170 & (2) \end{cases}$$

• حل الجملة :

نحل الجملة بطريقة الجمع.

يمكن كتابة الجملة على الشكل :

$$\begin{cases} 2(3x + 2y) = 2 \times 85 \\ -3(3x + 2y) = -3 \times 170 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 6x + 4y = 170 \\ -6x - 21y = -510 \end{cases}$$

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنتحصل على المعادلة ذات المجهول y التالية : $-17y = -340$

هذه المعادلة تقبل حلا واحدا هو $y = 20$.

نعوض y بالعدد 20 في المعادلة (1) نتحصل على المعادلة ذات المجهول x.

$3x + 2 \times 20 = 85$ أي $3x = 45$. هذه المعادلة تقبل حلا واحدا هو $x = 15$.

الجملة تقبل حلا واحدا هو $(15 ; 20)$.

• التحقيق

$$\begin{cases} 3 \times 15 + 3 \times 20 = 85 \\ 2 \times 15 + 7 \times 20 = 170 \end{cases}$$
كل من المساوتين صحيحة.

• الإجابة

ثمن القلم الواحد هو 15 دينارا و ثمن الكراس الواحد هو 20 دينارا.

تمرين 2 محيط مستطيل هو 84 cm.

إذا ضاعفنا عرضه و ضربنا طوله في 3، يصبح محيطه يساوي 124 cm.

- احسب طول و عرض هذا المستطيل.

حل نضع x عرض المستطيل و y طوله.

لدينا: $2(x+y) = 84$ و $2x + 3y = 124$

لتعيين x و y نحل الجملة
$$\begin{cases} 2(x+y) = 84 \\ 2x + 3y = 124 \end{cases}$$

هذه الجملة تكتب
$$\begin{cases} 2x + 2y = 84 & (1) \\ 2x + 3y = 124 & (2) \end{cases}$$

بالطرح طرف لطرف المعادلتين (2) و (1).

نجد $y = 40$

بتعويض y بالعدد 40 في المعادلة (1) نجد $2x + 80 = 84$ أي $2x = 4$

و بالتالي $x = 2$.

ينتج أن طول المستطيل هو 40cm و عرضه 2cm.

تمرين 3 ABC مثلث حيث $BC = 50\,mm$.

- أوجد الطولين AB و AC إذا علمت أن مجموع هذين الطولين هو 70 mm و فرقيهما هو 10 mm.
- أنشئ المثلث ABC.

حل لدينا: $AB + AC = 70$ و $AB - AC = 10$

لتعيين AB و AC نحل الجملة
$$\begin{cases} AB + AC = 70 & (1) \\ AB - AC = 10 & (2) \end{cases}$$

باستعمال طريقة الجمع و بالجمع طرفًا لطرف المعادلتين (1) و (2) نجد $2AB = 80$.

أي $AB = 40$

بتعويض AB بالعدد 40 في المعادلة (1)

نجد $40 + AC = 70$ إذن $AC = 30$.

ينتج أن $AB = 40\,mm$ و $AC = 30\,mm$.

- إنجاز الشكل.

المثلث ABC هو قائم في A.