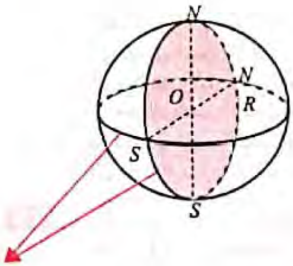
الدَّرسُ الـ 13

الهندسة في الفضاء

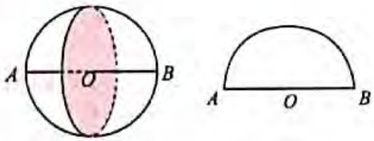
1 - الكرة و الجلة

1-1 تعريف



- الكرة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها R هي مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق $OM = R$
- الجلة التي مركزها O و نصف قطرها R هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $OM \leq R$

1-2 إنشاء كرة علم قطرها



للحصول على كرة قطرها $[AB]$ نتبع مايلي

- ننشئ نصف دائرة قطرها $[AB]$
- ندور نصف الدائرة المحصل عليها حول المحور $[AB]$

1-3 مساحة الكرة و حجم الجلة

- مساحة الكرة ذات نصف القطر R هي $A = 4\pi R^2$
- حجم الجلة ذات نصف القطر R هي $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

مثال

1) أحسب القيمة المضبوطة لمساحة الكرة التي نصف قطرها $3\,cm$

2) أحسب القيمة المضبوطة لحجم الجلة التي نصف قطرها $3\,cm$

الحل

1) مساحة الكرة التي نصف قطرها R هي،
$A=4\pi R^2=4\pi 3^2 cm^2=36\pi cm^2$

2) حجم الجلة التي نصف قطرها $3\,cm$ هو،
$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi 3^3 cm^3=36\pi cm^3$$

تمرين تدريبي

باعتبار ان الأرض كروية الشكل نصف قطرها $6400\ Km$
أحسب مساحتها و حجمها (تكتب النتائج على الشكل $a.10^n$) حيث a مدور إلى $0{,}01$

الحل

- مساحة الأرض هي $A=4\pi R^2$

$$A=4\pi (6400\,Km)^2\approx 4\pi.40960000\ Km^2\approx 12{,}56.40960000\ Km^2$$
$$\approx 514457600\ Km^2$$

الكتابة العلمية لـ A هي $5{,}15.10^8$

- حجم الأرض هو $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

$$V=\frac{4}{3}\pi (6400\,Km)^3\approx\frac{4}{3}\pi\times 262144\times 10^6\ Km^3\approx 1094765{,}773\times 10^6\ Km^3$$
$$\approx 1094765773\times 10^3\ Km^3$$

الكتابة العلمية لهذا الحجم هي $1{,}1\times 10^9\ Km^3$

2 - المقاطع المستوية

تعريف

(ε) شكل مجسم
تقاطع (ε) مع مستو يسمى مقطعا مستويا لهذا الجسم.

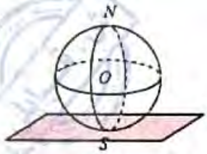
خاصية

- إذا كان مستقيم يعامد مستو فإنه يعامد كل المستقيمات المحتواة في هذا المستوي
- المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان موجودان في نفس المستوي

2-1 مقطع كرة بمستو

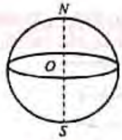
مقطع كرة بمستو هي دائرة.
$[NS]$ قطر سطح الكرة ذات المركز O و (P) المستوي العمودي على $[NS]$ في النقطة I
نقول ان OI هي المسافة بين النقطة O و المستوي (P)

نلخص مختلف التقاطعات في ثلاث حالات هي



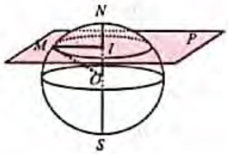
- **الحالة الأولى** $OI = R$

الدائرة الناتجة من التقاطع مركزها N (أو S) و نصف قطرها 0 نقول ان المستوي (P) مماس للكرة في N (أو S)



- **الحالة الثانية** $OI = 0$

الدائرة الناتجة من التقاطع مركزها O و نصف قطرها R نقول عن هذه الدائرة بالدائرة الكبرى في الكرة



- **الحالة الثالثة** $O \langle OI \langle R$

الدائرة الناتجة مركزها I و نصف قطرها $\sqrt{R^2 - OI^2}$ والمثلث OIM قائم

ملاحظة

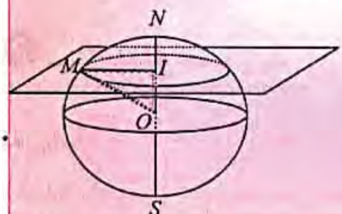
في حالة $OI \rangle R$ فإن المستوي لا يقطع الكرة

مثال

كرة مركزها النقطة O و نصف قطرها $12\,cm$ ، مستو يقطع هذه الكرة في دائرة مركزها I وطول نصف قطرها $5\,cm$

. أعط رسما يوضح المعطيات ثم أحسب القيمة المدورة إلى 0,01 للطول OI

الحل



المثلث OMI قائم في I حسب نظرية فيثاغورث

$OM^2 = OI^2 + IM^2$ و منه

$OI^2 = OM^2 - IM^2 = R^2 - IM^2$

$= 12^2 - 5^2 = 144 - 25 = 119$

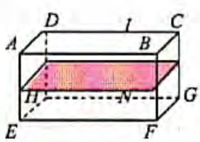
إذن $OI = \sqrt{119}\ cm \approx 10{,}9087$

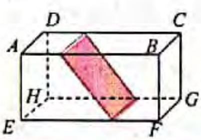
و القيمة المدورة إلى 0,01 هي $10{,}91\,cm$

2 - 2 مقطع متوازي المستطيلات، أسطوانة بمستو

متوازي المستطيلات

- مقطع متوازي المستطيلات بمستو يوازي احد أوجهه هو مستطيل
- مقطع متوازي المستطيلات بمستو يوازي احد احرفه هو مثلث





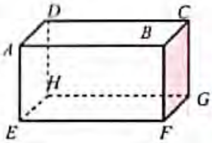
الأسطوانة الدورانية

- مقطع أسطوانة نصف قطرها R بمستو عمودي على محورها هي الدائرة التي نصف قطرها R ومركزها ينتمي لهذا المحور
- مقطع أسطوانة نصف قطرها R بمستو يوازي محورها هو مستطيل (الشكل $page212$)

مثال

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات حيث $AB=12\text{ cm}$ ، $AD=9\text{ cm}$ ، $AE=7\text{ cm}$.

في كل حالة من الحالات التالية



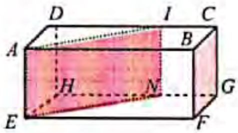
أحسب مساحة مقطع $ABCDEFGH$ بالمستوي (P)

ا) (P) يوازي (BF) و يمر من A و I حيث $IC=2\text{ cm}$

ب) (P) يوازي (BF) و يمر من A و C

ج) (P) يوازي الوجه $ABCD$

الحل



ا) مقطع $ABCDEFGH$ في هذه الحالة هو المستطيل $AINE$

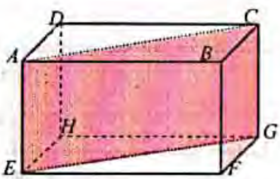
المثلث ADI قائم في D حسب نظرية فيثاغورث

$$AI^2=AD^2+DI^2 \quad =9^2+10^2=181$$

$$AI \ =\sqrt{181}$$

و منه مساحة المستطيل $AINE$ هي $AI\times AE$

$$AI\times AE=\sqrt{181}\times 7\ cm^2$$



ب) مقطع $ABCDEFGH$ بالمستوي (P) في هذه الحالة هو المستطيل $ACGE$

مساحة المستطيل $ACGE$ هي $AC\times AE$

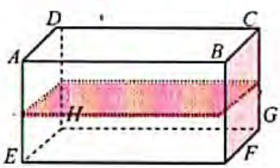
المثلث GFE قائم في F حسب نظرية فيثاغورث

$$FG^2+FE^2=EG^2$$

$$EG^2=9^2+12^2=81+144=225$$

إذن $EG \ =\sqrt{125}=15\text{ cm}$

مساحة المستطيل $ACGE$ هي $EG\times AE=15\times 7=105\ cm^2$



ج) مقطع $ABCDEFGH$ بالمستوي (P) في هذه الحالة هو مستطيل طوله DC و عرضه AD و بالتالي مساحته هي $DC\times AD$ اي $12\times 9=108\ cm^2$

2 - 3 مقطع هرم ، مخروط ، موشور قائم

مقطع هرم بمستو

مقطع هرم بمستو يوازي قاعدته هو سطح له نفس شكل القاعدة و أبعاده مصغرة معامل التصغير

$$\frac{SI}{SA}=\frac{SJ}{SB}=\frac{IJ}{AB}=\ldots\ldots$$

مقطع مخروط دوراني بمستو

مقطع مخروط دوراني بمستو موازي لقاعدته هو دائرة مصغرة للقاعدة. مركزها ينتمي إلى ارتفاع المخروط(الشكل page212)

معامل التصغير

$$\frac{SI}{SO}=\frac{SJ}{SA}=\frac{IJ}{OA}=\ldots\ldots$$

مقطع موشور قائم بمستو

مقطع موشور قائم بمستو يوازي القاعدة هو سطح له نفس طبيعة القاعدة و نفس بعديها

مثال

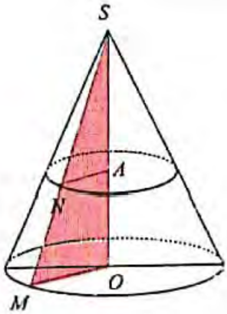
مخروط دوراني رأسه S و قاعدته قرص مركزه O و نصف قطره $6\,cm$ و $SO=8\,cm$

A نقطة من الارتفاع $[SO]$ بحيث $SA=5\,cm$

المستوي العمودي على (SO) في A يقطع المولد $[SM]$ في النقطة N

احسب نصف قطر الدائرة الناتجة من تقاطع المخروط بهذا المستوي

الحل



مقطع المخروط الدوراني بالمستوي هو قرص مصغر للقاعدة

معامل التصغير

$$\frac{SA}{SO}=\frac{AN}{OM}$$

و منه $\frac{AN}{6}=\frac{5}{8}$ إذن $AN=\frac{5\times 6}{8}=\frac{30}{8}$

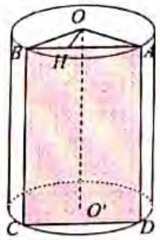
إذن المقطع هو دائرة مركزها النقطة A و طول نصف قطرها $3{,}75\,\text{cm}$

- **طريقة اخرى**

يمكن أن نجد نصف القطر بتطبيق نظرية طاليس على المثلثين SAN و SOM

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1



اسطوانة دورانية قاعدتيها قرصين مركزهما O و O' و طول نصف قطريهما $6\ cm$ ، و ارتفاعها $7\ cm$

مستو يوازي (OO') يقطع الأسطوانة في المستطيل $ABCD$

$[OH]$ الارتفاع النازل من O في المثلث AOB حيث $OH = 4\ cm$

1) ما هي طبيعة المثلث OAB 2) احسب الطول BH

3) احسب مساحة المقطع الناتج(مساحة $ABCD$)

الحل

1) بما أن A و B تنتميان إلى القاعدة فإن القطعتين $[OA]$ و $[OB]$ أنصاف أقطار و بالتالي $OA = OB$ إذن المثلث OAB متقايس الساقين في النقطة O

2) المثلث BHO قائم في H حسب نظرية فيثاغورث

$OH^2 + BH^2 = OB^2$

و منه $BH^2 = OB^2 - OH^2$

$BH^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

إذن $BH = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ \text{cm}$

3) مساحة المقطع الناتج هي $BA \times BC$

بما أن $[OH]$ هي العمود في المثلث OAB المتقايس الساقين في النقطة O فإن $[OH]$ هي المتوسط المتعلق بالضلع $[AB]$ و عليه H منتصف القطعة $[AB]$

إذن $BA = 2\ BH\ = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}\ \text{cm}$

$BA \times BC = 4\sqrt{5} \times 7 = 28\sqrt{5}\ cm^2$ إذن مساحة المقطع هي $28\sqrt{5}\ \text{cm}^2$

تطبيق 2

مخروط دوراني ارتفاعه $12\ \text{cm}$ و قاعدته مركزها O و نصف قطرها $9\ \text{cm}$

يقطعه مستو يوازي قاعدته و يبعد بمسافة $7\ \text{cm}$ عن الرأس S و النقطة A من دائرة القاعدة

المستوي يقطع المولد $[AS]$ في النقطة B و الارتفاع $[SO]$ في النقطة I

- ما هو طول نصف قطر المقطع المخروط بهذا المستوي

الحل

المقطع الناتج هو دائرة مركزها I و نصف قطرها IB

بتطبيق نظرية طاليس في المثلثين SIB و SOA تسمح لنا بكتابة $\frac{SI}{SO}=\frac{BI}{AO}$

و منه $BI=\frac{SI}{SO}\times AO=\frac{7\times 9}{12}=\frac{63}{12}\text{cm}$

$BI=5{,}25\,cm$ إذن طول نصف قطر المقطع هو $5{,}25\,cm$

تطبيق 3

متوازي مستطيلات قائم. أبعاده $AB=20\,\text{cm}$ و $BC=10\,\text{cm}$ و $BF=8\,\text{cm}$

I نقطة من $[DC]$ بحيث $DI=15\,cm$

الهرم الذي رأسه D و قاعدته BCF يقطع بمستو يوازي القاعدة و المار من I

1) ما هي طبيعة المقطع IJK ؟

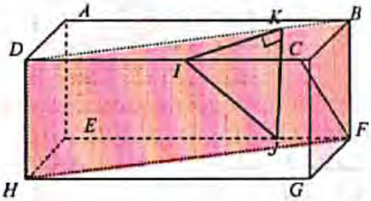
2) احسب IK و KJ

3) احسب مساحة المقطع IJK

الحل

1) طبيعة المقطع IJK مثلث قائم في K لأن المقطع له نفس طبيعة القاعدة (الهرم)

2) حساب IK و KJ



بتطبيق نظرية طاليس على المثلثين

DIK و DCB نجد $\frac{DI}{DC}=\frac{DK}{DB}=\frac{IK}{CB}$ ....(I)

من المساواة (I) نجد $\frac{DI}{DC}=\frac{IK}{CB}$ و منه

$IK=\frac{DI}{DC}\times CB$ بالتعويض نجد

$IK=\frac{15}{20}\times 10=\frac{15}{2}\,cm=7{,}5\,cm$ إذن $IK=7{,}5\,cm$

- لدينا $\frac{DK}{DB}=\frac{DJ}{DF}=\frac{KJ}{BF}$ ....(II)

من (I) و (II) نجد $\frac{DK}{DB}=\frac{KJ}{BF}$ ....(III)

و بما أن $\frac{DK}{DB}=\frac{DI}{DC}$ فإن المساواة تصبح $\frac{DI}{DC}=\frac{KJ}{BF}$ و منه نستنتج

$KJ=\frac{DI}{DC}\times BF=\frac{15}{20}\times 8\,cm=6\,cm$ إذن $KJ=6\,cm$

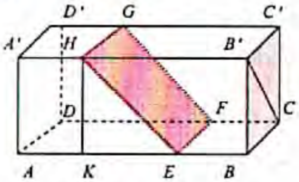
3) حساب مساحة المثلث IJK

المثلث IJK قائم في K إذن مساحته هي $\frac{KI\times KJ}{2}$

$$\frac{KI \times KJ}{2} = \frac{7,5 \times 6}{2} = 22,5\ cm^2$$

إذن مساحة المثلث IJK هي $22,5\ cm^2$

تطبيق 4



شكل متوازي المستطيلات القائم يقطع بمستو يوازي الحرف $[BC]$ ، نعطي $HK = 20\ cm$ و $EF = 25\ cm$ و $KE = 15\ cm$

1) ما هي طبيعة المقطع $EFGH$ ؟

2) احسب HE

3) ماذا يمكن استنتاجه من السؤال الثاني فيما يخص المقطع السابق.

الحل

1) طبيعة المقطع $EFGH$ مستطيل

2) المثلث HKE قائم في K حسب نظرية فيثاغورث $HK^2 + KE^2 = HE^2$

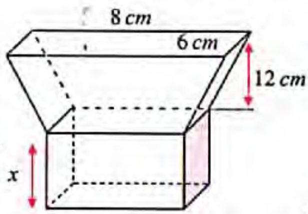
$HE^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$ إذن $HE = \sqrt{625} = 25\ cm$

3) بما ان $HE = 25\ cm$ و $EF = 25\ cm$ فإن الرباعي $EFGH$ مربع

تطبيق 5

علبة على شكل متوازي مستطيلات قائم . ابعادها 10 ، 6 و x بالسنتيمتر

1) عبر بدلالة x عن حجم هذه العلبة



2) علبة اخرى مشكلة من جزء من هرم و متوازي مستطيلات قائم كما هو مبين في الشكل.

الجزء من الهرم السابق أخذ من هرم ارتفاعه $24\ cm$ مقطوع في نصف الارتفاع

قاعدته مستطيل و ابعاده هي $8\ cm$ و $6\ cm$

متوازي المستطيلات القائم قاعدته مقطع الهرم و ارتفاعه $x\ cm$

أ) احسب ابعاد مقطع الهرم ثم استنتج حجم متوازي المستطيلات بدلالة x

ب) احسب حجم الجزء من الهرم ثم استنتج الحجم الكلي للعلبة

ج) عين قيمة x بحيث يكون للعلبتين نفس الحجم

الحل

1) حجم العلبة هو $6 \times 4 \times x\ cm^3$ أي $(24x)cm^3$

2) أ) بما ان الجزء من الهرم مقطوع عند نصف الارتفاع فإن معامل التناسب هو النصف و عليه طول القاعدة و ليكن α يحقق $\frac{\alpha}{8}=\frac{1}{2}$ و منه ينتج ان $\alpha=4\ cm$

و عرض القاعدة و ليكن β يحقق $\frac{\beta}{6}=\frac{1}{2}$ و بالتالي $\beta=3\ cm$

إذن ابعاد متوازي المستطيلات هي 4 ، 3 و x بالسنتيمتر

- حجم متوازي المستطيلات هو $3\times4\times x=12x$ إذن حجم متوازي للستطيلات هو $12x\ cm^3$

ب) حجم الهرم هو $\frac{1}{3}\times(6\times8)\times24$ اي $384\ cm$

و حجم الهرم الذي قاعدته مقطع الهرم هي $\frac{1}{3}\times(4\times3)\times12=48$

إذن حجم جزء الهرم العلوي هي $384-48=336\ cm^3$

حجم العلبة = حجم متوازي المستطيلات + حجم الجزء العلوي من الهرم

إذن حجم العلبة هو $(336+12x)cm^3$

حجم العلبة هو $6\times4\times x\ cm^3$ اي $(24x)cm^3$

ج) حجم العلبة الأولى = حجم العلبة الثانية يعني ان

$336+12x=24x$ و منه $12x=336$ إذن $x=\frac{336}{12}=28$ و بالتالي قيمة x هي $28\ cm$

تطبيق 6

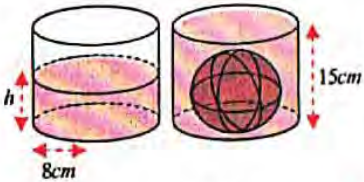
وحدة الأطوال هي السنتيمتر (cm)

و وحدة الأحجام هي cm^3

نرمز بـ h إلى ارتفاع الماء في اسطوانة ذات نصف القطر $8\ cm$

و الارتفاع $5\ cm$ (الشكل (1))

نضع داخل هذه الاسطوانة جلة ذات نصف القطر $6\ cm$ فامتلأت الاسطوانة (الشكل (2))



1) احسب بدلالة π حجم الاسطوانة 2) احسب بدلالة π حجم الجلة

3) استنتج من الأسئلة السابقة الارتفاع h للماء في الاسطوانة قبل وضع الجلة

الحل

1) حجم الاسطوانة هو $\pi\times8^2\times15$ اي 960π

2) حجم الجلة هي $\frac{4}{3}\times\pi\times6^3$ اي $288\pi\ cm^3$

3) حجم الاسطوانة = حجم الماء + حجم الجلة و منه

حجم الجلة – حجم الاسطوانة = حجم الماء

$=960\pi-288\pi=672\pi\ cm^3$

و من جهة أخرى حجم الماء يساوي $\pi\times8^2\times h$ اي $64\pi\times h$ إذن $672\pi=64\pi\times h$

ومنه نستنتج $h=\frac{672\pi}{64\pi}=\frac{672}{64}=10{,}5$ إذن ارتفاع الماء في الأسطوانة هو $10{,}5\ cm$