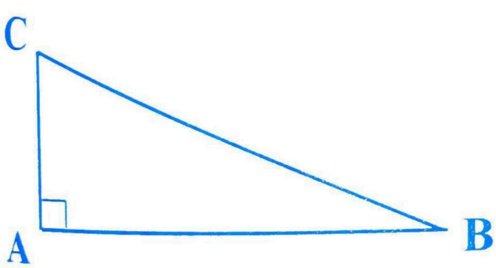
11 حساب المثلثات

الكفاءات المستهدفة

- ✯ تعريف جيب وظل زاوية حادة في مثلث قائم
- ✯ استعمال الحاسبة لتعيين قيمة مقربة (أو القيمة المضبوطة) لكل من جيب وظل زاوية حادة أو لتعيين قيس زاوية بمعرفة الجيب أو الظل.
- ✯ حساب زوايا أو أطوال بتوظيف الجيب أو جيب التمام أو الظل.
- ✯ إنشاء هندسيا (بالمسطرة غير المدرجة والمدور) زاوية بمعرفة القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية.
- ✯ معرفة واستعمال العلاقتين: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ، $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

الهدف من دراسة حساب المثلثات هو إيجاد العلاقات بين الزوايا والأضلاع، وبمعرفة هذه العلاقات والاستعانة بالآلة الحاسبة، يمكننا حساب الأطوال والزوايا المجهولة وذلك بمعرفة بعض الأطوال (بعض الزوايا).

تذكير:



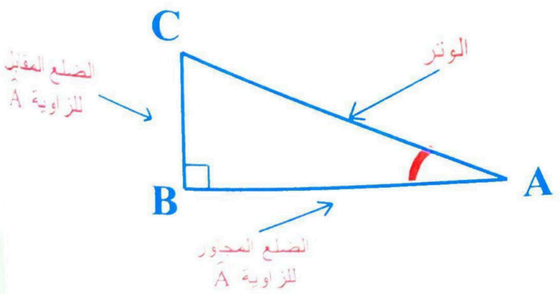
ليكن ABC مثلث قائم في A، نذكر بما يلي:

1) العلاقة بين الزوايا: $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$

2) العلاقة بين الأضلاع: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

(نظرية فيثاغورث)

تعريف:



1) يعطى المثلث ABC القائم في B، ولنعتبر إحدى زواياه الحادة ولتكن $\widehat{A}$.

الضلع [BC] يسمى الضلع المقابل للزاوية $\widehat{A}$

الضلع [AB] يسمى المجاور للزاوية $\widehat{A}$

2) لنعرف النسب الثلاثة الآتية:

* جيب التمام ونرمز إليه بـ: **cos**

$\cos \widehat{A} = \dfrac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$ ، ونكتب: $COS\ \widehat{A} = \dfrac{AB}{AC}$.

* جيب ونرمز إليه بـ: **sin**

$\sin \widehat{A} = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$ ، ونكتب: $Sin\,\widehat{A} = \dfrac{BC}{AC}$.

* الظل ونرمز إليه بـ: **tan**

$\tan \widehat{A} = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$ ، ونكتب: $\tan \widehat{A} = \dfrac{BC}{AB}$.

ملاحظات:

* لحساب أي نسبة من النسب الثلاثة السابقة، يجب أن نعبر عن الطولين بنفس الوحدة.

* جيب وجيب التمام زاوية حادة هي أعداد بلا وحدة وتكون محصورة بين 0 و (+1).
(لأن طول الضلع المقابل وطول الضلع المجاور كلا منهما أصغر من طول الوتر).

* وظل زاوية حادة يمكن أن يكون أكبر من 1 .

الشكل المقابل يتكون من معلم متعامد ومتجانس وربع الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1

P نقطة من ربع الدائرة.

في المثلث OPH القائم في H.

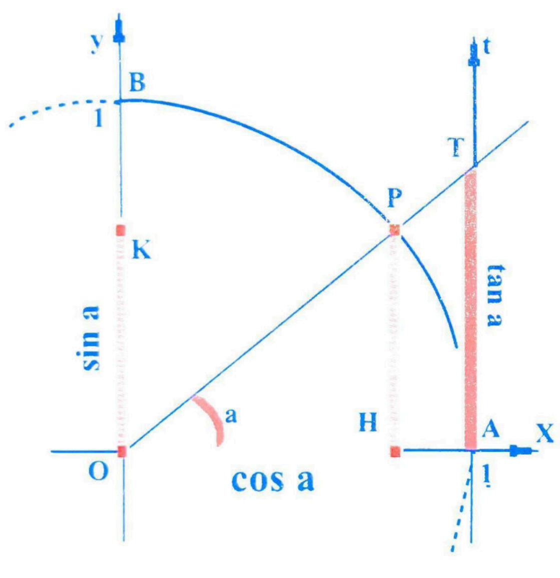
لدينا: العدد $\sin a$ يسمى ترتيب النقطة P

العدد $\cos a$ يسمى فاصلة النقطة P

أي: $\sin a = OK = HP$

$\cos a = OH = KP$

$\tan a = AT$



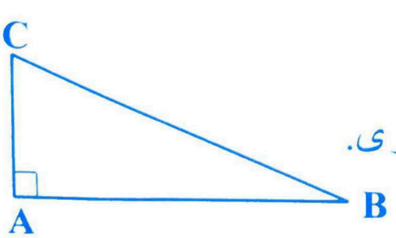
خاصية:

ABC مثلث قائم في $\widehat{A}$.

الزاويتان $\widehat{C}$, $\widehat{B}$ **متتامتان** (أي: $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$).

جيب إحدى الزاويتين يساوي جيب تمام الزاوية الأخرى.

ظل إحداهما يساوي مقلوب ظل الزاوية الأخرى.



أي: $\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}$ و $\cos \widehat{B} = \sin \widehat{C}$.

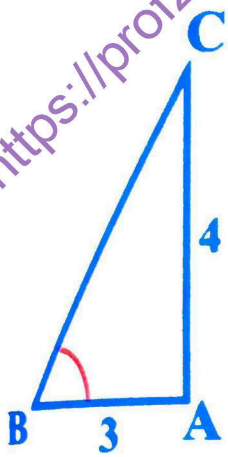
$\tan \widehat{B} = \dfrac{1}{\tan \widehat{C}}$ و $\tan \widehat{C} = \dfrac{1}{\tan \widehat{B}}$

مثـال:

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ و $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ (لأن: $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$)

حساب زوايا أو أطوال بتوظيف الجيب أو جيب التمام أو الظل:

مثال 01:



وحدة الطول هي cm ، وليكن ABC مثلث قائم في A .

حيث: $AB = 3$ ، $AC = 4$.

نريد حساب القيم المضبوطة لـ: $\sin \widehat{B}$ ، $\cos \widehat{B}$ ، $\tan \widehat{B}$.

الحـل:

لحساب القيم المضبوطة لـ: $\sin \widehat{B}$ ، $\cos \widehat{B}$ ، $\tan \widehat{B}$.

نحسب أولا طول الوتر BC.

بما أن المثلث ABC قائم ، بتطبيق نظرية فيثاغورث نجد:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه: $BC^2 = 9 + 16 = 25$

ومنه: $BC = \sqrt{25} = 5$.

لدينا: $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ ، ومنه: $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

$\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ ، ومنه : $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5} = 0,6$.

$\tan \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB}$ ، ومنه: $\tan \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3} = 1,33$.

ملاحظة: باستعمال الآلة الحاسبة، نستطيع حساب قيمة تقريبية للزاوية $\widehat{B}$.

وذلك كما يلي: انطلاقا من $\sin \widehat{B} = \dfrac{4}{5}$.

* اكتب على الشاشة: 4 / 5 = INV SIN

* أو اكتب : SIN^{-1} (4 / 5) EXE

مثال 02:

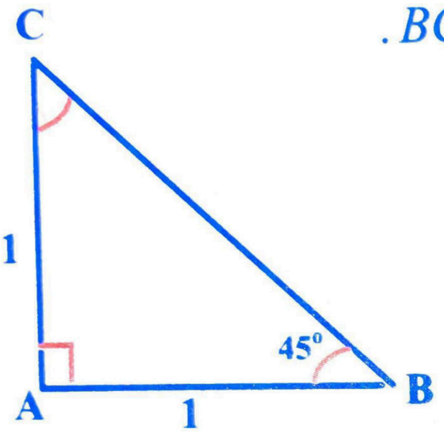
وحدة الطـول هي cm ، وليكن ABC مثلث قائم في A ومتسـاوي الساقيـن (AB = AC = 1).

نريد حساب القيم المضبوطة لـ: $\sin \widehat{B}$ ، $\cos \widehat{B}$ ، $\tan \widehat{B}$.

الحل:

بما أن المثلث ABC متساوي الساقين فإن: $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^{o}$.

نحسب أولا طول الوتر " BC " وذلك بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم ABC.



$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1 + 1 = 2$ ومنه : $BC = \sqrt{2}$.

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$

نتيجـة: $\sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 45^{\circ} = 1$.

مثال 03:

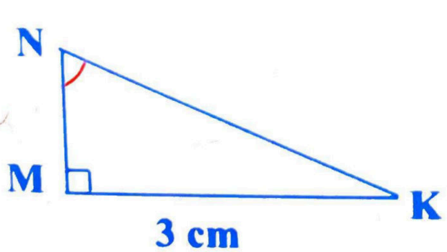
MNK مثلث قائم في M ، حيث $MK = 3\ cm$ ، $\widehat{N} = 64^{o}$.

نريد حساب NK و MN بتقريب 0,01 cm.

الحل:

لدينا الطول MK معلوم، الذي يمثل طول الضلع المقابل للزاوية $\widehat{N}$.

1) حساب NK:



NK يمثل طول الوتر في المثلث MNK.

لذلك نستعمل $\sin \widehat{N}$.

$\sin \widehat{N} = \frac{3}{NK}$.

ومنه: $\sin 64^{\circ} = \frac{3}{NK}$ ، ومنه: $NK = \frac{3}{\sin\ 64^{o}}$

ومنه (وباستعمال الآلة الحاسبة) نحصل على $NK \approx 3{,}33\ cm$

2) حساب MN:

نعلم الطول MK الذي يمثل طول الضلع المقابل للزاوية $\widehat{N}$ ،

ونبحث عن MN الذي يمثل طول الضلع المجاور للزاوية $\widehat{N}$

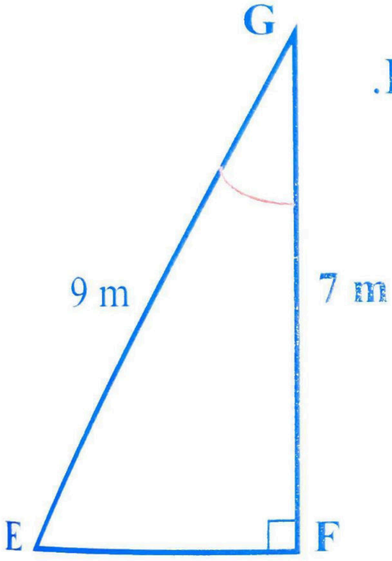
لذلك، نستعمل: $\tan \widehat{N}$.

$\tan \widehat{N} = \frac{3}{MN}$ ، ومنه: $MN = \frac{3}{\tan \widehat{N}}$.

ومنه: $MN = \frac{3}{\tan 64^o}$.

باستعمال الآلة الحاسبة نحصل على: $MN = \frac{3}{2,05} = 1,46$.

مثال 04:



EFG مثلث قائم في F ، حيث $FG = 7\ m$ ، $EG = 9\ m$.

لنحسب قيس الزاوية $\widehat{G}$ بتقريب 0,1.

الحل:

نلاحظ أن:

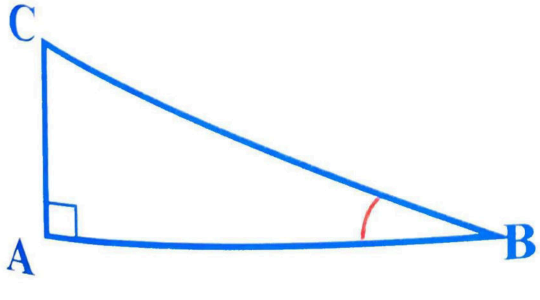
FG يمثل طول الضلع المجاور للزاوية $\widehat{G}$.

EG يمثل طول الوتر في المثلث EFG .

لذلك نستعمل $\cos \widehat{G}$ ، $\cos \widehat{G} = \frac{7}{9}$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{G} \approx 38,9^o$.

العلاقة بين الجيب وجيب التمام:



إذا كان ABC مثلث قائم في A فإن:

1) $(\sin \widehat{B})^2 + (\cos \widehat{B})^2 = 1$

2) $\tan \widehat{B} = \frac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}}$

البرهــــان:

1) نعلم أن:

$\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ ومنه: $(\sin \widehat{B})^2 = \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2 \quad (1)$

$\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ ومنه: $(\cos \widehat{B})^2 = \left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2 \quad (2)$

بجمع (1) و (2) طرفا إلى طرف نجد:

$$(\sin \widehat{B})^2 + (\cos \widehat{B})^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

ومنه: $(\sin \widehat{B})^2 + (\cos \widehat{B})^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$

لكن: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (وذلك بتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم ABC).

إذن: $(\sin \widehat{B})^2 + (\cos \widehat{B})^2 = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$ (لأن $BC \neq 0$).

وبالتالي: $(\sin \widehat{B})^2 + (\cos \widehat{B})^2 = 1$

2) لدينا: $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ و $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$

$\tan \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB} \quad ...(1)$ ، نقسم حدي الكسر **(1)** على BC (لأن $BC \neq \mathbf{0}$) ينتج:

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC \;/\; BC}{AB \;/\; BC} = \left(\frac{AC}{BC}\right) / \left(\frac{AB}{BC}\right).$$

لكن: $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ و $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$

ومنه: $\tan \widehat{B} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}}$

ملاحظة:

بالنسبة للزاوية $\widehat{C}$ يكون: $(\sin\widehat{C})^2+(\cos\widehat{C})^2=1$ و $\tan\widehat{C}=\dfrac{\sin\widehat{C}}{\cos\widehat{C}}$.

مثـال:

في المثلث ABC القائم في A.

نعتبر الزاوية الحادة $\widehat{B}$ ، حيث $\sin\widehat{B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

احسب $\cos\widehat{B}$ ، $\tan\widehat{B}$.

الحـــل:

نعلم أن: $(\sin\widehat{B})^2+(\cos\widehat{B})^2=1$.

ومنه: $(\cos\widehat{B})^2=1-(\sin\widehat{B})^2$.

ومنه: $\left(\cos\widehat{B}\right)^2=1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

إذن: $\cos\widehat{B}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\pm\dfrac{1}{2}$.

بما أن $\widehat{B}$ زاوية حادة فإن: $\cos\widehat{B}=\dfrac{1}{2}$.

حساب $\tan\widehat{B}$: $\tan\widehat{B}=\dfrac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{1}=\sqrt{3}$

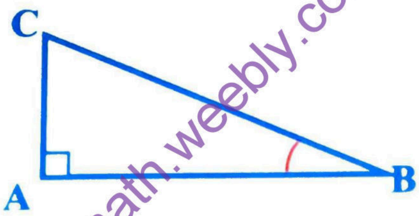
ملاحظة:

إنطلاقا من $\cos\widehat{B}=\dfrac{1}{2}$ ، نستطيع الحصول على: $\sin\widehat{B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

استعمال الآلة الحاسبة لتعيين قيمة مقربة (أو القيمة المضبوطة) لكل من جيب، جيب التمام وظل زاوية حادة أو لتعيين قيس زاوية حادة بمعرفة الجيب أو الظل.

حساب الزوايا:

ABC مثلث قائم في A ، بمعرفة الطولين AB ، BC وباستعمال الآلة الحاسبة نستطيع تعيين قيس الزاوية $\widehat{B}$ التي جيب تمامها $\dfrac{AB}{BC}$. وذلك كما يلي



مثلا: إذا كان $\frac{AB}{BC} = 0,5$

تحقق أن الآلة في وضعية $\boxed{\text{degré}}$.

اكتب من اليسار إلى اليمين: $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{\text{inv}}$ 0,5

أو $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{\text{shift}}$ 0,5 أو $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{2^{nd}}$ 0,5 .

(حسب نوعية الآلة الحاسبة المستعملة).

الشاشة تظهر لنا قيمة للزاوية $\widehat{B}$.

ونكتب: $\widehat{B} = 60°$.

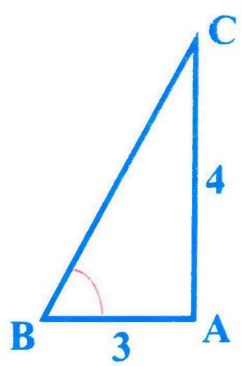
نتيجة:

في مثلث قائم إذا علمنا طول الضلع المجاور لزاوية حادة وطول الوتر فإننا نستطيع حساب قيس هذه الزاوية.

مثـال:

ABC مثلث قائم في A حيث $AB = 3cm$ ، $AC = 4cm$.

احسب قيس الزاوية $\widehat{B}$.



1) باستعمال نظرية فيثاغورث نحسب BC .

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$.

ومنه : $BC = 5$ cm .

2) $\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$.

باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{B} \approx 53°$

ملاحظة:

1) جيب تمام الزاوية القائمة غير معرف في المثلث القائم ، لكن الآلة الحاسبة تعطينا $\cos 90° = 0$

2) الآلة الحاسبة تعطينا القيم التالية:

$\cos 0° = 1$; $\cos 60° = 0,5$; $\cos 90° = 0$

$\cos 180° = -1$; $\cos 120° = -0,5$; $\cos 360° = 1$

لكن هذه الحسابات ليست في مثلث قائم.