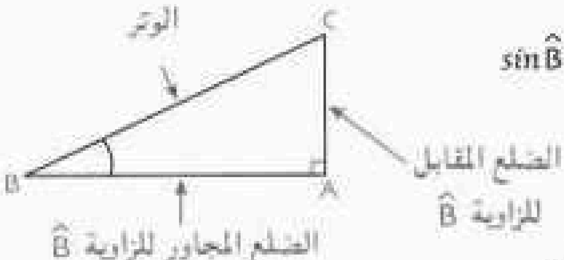
معارف

I - جيب و ظل زاوية حادة

1 • جيب زاوية

تعريف ABC مثلث قائم في A.
جيب الزاوية $\hat{B}$ ، و الذي يرمز له بالرمز $\sin\hat{B}$ ، هو النسبة $\frac{AC}{BC}$.



نكتب $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$. أي $\sin\hat{B} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \hat{B}}{\text{طول الوتر}}$

تذكير $\cos\hat{B} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \hat{B}}{\text{طول الوتر}}$ أي $\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$

ملاحظة كل من جيب و جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم هو عدد موجب محصور بين 0 و 1.

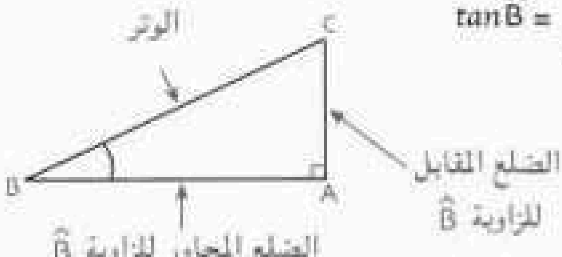
مثال EFG مثلث قائم في F.

$\sin\hat{E} = \frac{FG}{EG}$ ؛ $\sin\hat{G} = \frac{EF}{EG}$

2 • ظل زاوية

تعريف ABC مثلث قائم في A.
ظل الزاوية $\hat{B}$ ، و الذي يرمز له بالرمز $\tan\hat{B}$ ، هو النسبة $\frac{AC}{AB}$.

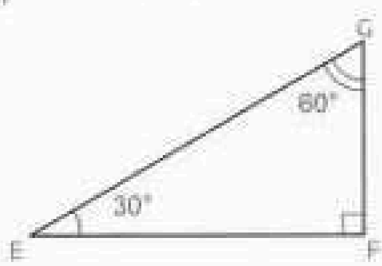
نكتب $\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB}$. أي $\tan\hat{B} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \hat{B}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \hat{B}}$



ملاحظة ظل زاوية حادة في مثلث قائم هو عدد موجب.

مثال في المثلث EFG القائم في F لدينا :

$\tan\hat{E} = \frac{FG}{EF}$ ؛ $\tan\hat{G} = \frac{EF}{FG}$



2 - العلاقات بين النسب المثلثية

ABC مثلث قائم في A، x هو قيس إحدى زاويتيه الحادتين.

خاصية $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

برهان ABC مثلث قائم في A. نضع $x = \hat{B}$، فيكون $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \dfrac{AC}{BC} \times \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{AB}$

و نعلم أن : $\tan x = \dfrac{AC}{AB}$ إذن $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{AB}{AC}$

و بالتالي : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

خاصية $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ملاحظة الكتابة $\sin^2 x$ تدل على $(\sin x)^2$

برهان ABC مثلث قائم في A . بوضع $x = \hat{B}$ ينتج أن $\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2$

$$= \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

و حسب نظرية فيثاغورث لدينا : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

و بالتالي : $\dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$

إذن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

مثال EEG مثلث قائم في E.

لدينا : $\cos^2 \hat{F} + \sin^2 \hat{F} = 1$

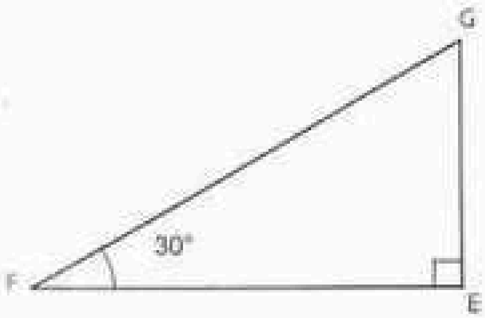
أي : $\cos^2 30° + \sin^2 30° = 1$

$(0,87)^2 + (0,50)^2 \approx 1$ (يمكن التحقق بالحاسبة).

قيس الزاوية $\hat{G}$ هو $60°$.

بتطبيق نفس العلاقة، نجد:

$\cos^2 60° + \sin^2 60° = 1$



طرائق

1 - استعمال حاسبة

1 • استعمال حاسبة لإيجاد نسبة مثلثية لزاوية

طريقة: لحساب جيب زاوية x علم قيسها بالدرجة، باستعمال حاسبة، تنفذ البرنامج التالي :

MODE DRG sin (x صب قيمة) =

ملاحظة: • ينفذ البرنامج من اليسار إلى اليمين.

• نختار اللمسة cos أو tan لحساب جيب التمام x أو ظل x.

تمرين 1 احسب $\sin 25°$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

حل • استعمال الحاسبة : نضغط على اللمسة MODE ثم DRG لاختيار الدرجة كوحدة قياس الزوايا.

• ننفذ البرنامج التالي (من اليسار إلى اليمين) sin 25 =

و يظهر على الشاشة : 0.42261828 .

بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ نكتب $\sin 25° \approx 0.42$

تمرين 2 ما هو $\tan 36°$ بتقريب $\frac{1}{100}$.

حل • استعمال الحاسبة : نضغط على اللمسة MODE ثم DRG لاختيار الدرجة كوحدة قياس الزوايا.

• ينفذ البرنامج التالي (من اليسار إلى اليمين) tan 36 =

و يظهر على الشاشة : 0.72654255 و بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ نكتب $\tan 36° \approx 0,73$

2 • استعمال حاسبة لإيجاد قيس زاوية إحدى نسبها المثلثية معلومة

طريقة: لحساب القيس x بالدرجة لزاوية علم جيب هذه الزاوية، باستعمال حاسبة، تنفذ البرنامج التالي :

MODE DRG 2nd $\sin^{-1}$ (x صب قيمة) =

ملاحظة: • في بعض الحاسبات، اللمسة 2nd تعوض باللمسة SHIFT.

• نختار اللمسة $\cos^{-1}$ أو $\tan^{-1}$ لحساب القيس بالدرجة لزاوية علم جيب تمام هذه الزاوية أو ظلها.

تمرين 1 ما هي الزاوية x بالدرجة حيث $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بتقريب $\frac{1}{100}$ ؟

حل • نختار الدرجة كوحدة قياس الزوايا باللمستين MODE ثم DRG

2nd sin⁻¹ (√ 2 : 2) = 45.

إذن نكتب $x = 45°$ وهذه قيمة مضبوطة.

تمرين 2 • ما هي الزاوية x حيث $\tan x = 2{,}72$ ؟ أعط مدور هذه القيمة إلى $\frac{1}{100}$.

حل • نستعمل الحاسبة بعد اختيار الدرجة كوحدة لقياس الزوايا.

2nd tan⁻¹ 2,72 = 69.81419699

و بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ نكتب : $x \approx 69{,}81°$.

2 - حساب أطوال بتوظيف الجيب أو جيب التمام أو الظل

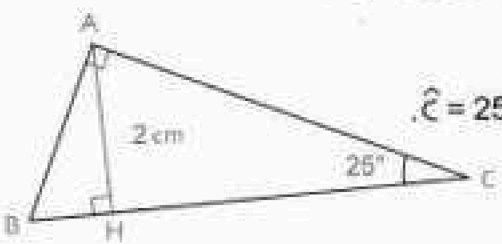
طريقة

لحساب طول يمكن توظيف الجيب أو جيب التمام أو الظل باتباع المراحل التالية :

1. نعين مثلثا قائما يكون هذا الطول هو طول أحد أضلاعه.
2. نختار الزاوية الحادة و النسبة المثلثية لها بحيث يكون هذا الطول هو المجهول الوحيد في معادلة.
3. نحل المعادلة و نحتفظ بالحلول الموجبة.
4. نتحقق بالمسطرة المدرجة على الشكل.

تمرين 1 في مثلث قائم ، الارتفاع المتعلق بالوتر هو 2 cm و قيس إحدى زواياه هو 25°.

• احسب المسافة بين رأس هذه الزاوية و حامل الإرتفاع.



حل ليكن ABC المثلث القائم في A. [AH] هو الإرتفاع و $\hat{C} = 25°$.

المسافة بين الرأس C و حامل الإرتفاع هو HC.

[HC] هو ضلع في المثلث AHC القائم في H

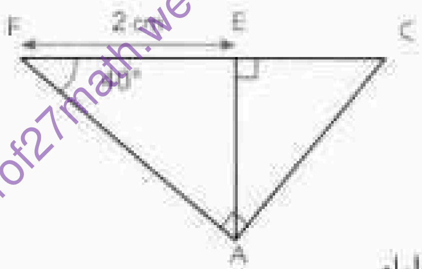
و $\hat{C}$ هي إحدى زوايا هذا المثلث. لدينا : $\tan \hat{C} = \frac{AH}{HC}$ أي $HC = \frac{AH}{\tan \hat{C}} = \frac{2}{\tan \hat{C}}$.

باستعمال الحاسبة و بتنفيذ البرنامج التالي :

2 : (tan 25) =

نجد : 4.289013841

و بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ نتحصل على : $AH \approx 4.29$ cm.



تمرين 2 إليك الشكل المقابل.

- احسب الطول AE.

حل [EF] ضلع في المثلث AEF القائم في E. $\hat{F}$ هي إحدى زواياه.

لدينا : $\cos \hat{F} = \frac{EF}{AF}$ أي $\cos 40° = \frac{2}{AF}$ و بالتالي : $AF = \frac{2}{\cos 40°}$

باستعمال الحاسبة و بتنفيذ البرنامج التالي : 2 : (cos 40) =

نجد : 2.610814579

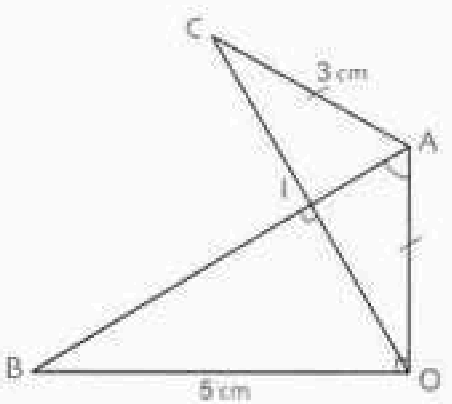
بالتدوير إلى $\frac{1}{100}$ ، نكتب $AF \approx 2,61 \text{ cm}$.

3 - حساب قيس زاوية حادة

طريقة

لحساب قيس زاوية حادة يمكن توظيف النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم و العلاقات بينها.

- نعين مثلثا قائما بحيث تكون هذه الزاوية هي إحدى زاويتيه الحادتين.
- نختار الزاوية و النسبة المثلثية لها بحيث يمكن حساب هذه النسبة .
- نستعمل الحاسبة لتعيين قيس الزاوية.
- نتحقق بالمنقلة.



تمرين 1 إليك الشكل المقابل.

- احسب قيس الزاوية $\widehat{IAO}$.

حل $\widehat{IAO}$ هي زاوية حادة في المثلث IAO القائم في O.

لدينا : $\tan \widehat{IAO} = \tan \widehat{BAO}$

نعلم أن $\tan \widehat{BAO} = \frac{BO}{OA} = \frac{5}{3}$

إذن $\tan \widehat{IAO} = \frac{5}{3}$

لحل المعادلة $\tan \widehat{IAO} = \frac{5}{3}$ نستعمل الحاسبة فنتحصل على $\widehat{IAO} \approx 59°$.

تمرين 2 • احسب بدون استعمال حاسبة، القيمة المضبوطة لجيب زاوية قيسها x علما أن $\cos x = 0{,}6$.

حل نعلم أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ إذن $(0{,}6)^2 + \sin^2 x = 1$ أي $0{,}36 + \sin^2 x = 1$

إذن $\sin^2 x = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$.

و بالتالي : $\sin x = \sqrt{0{,}64}$ (لأن $\sin x$ موجب). إذن $\sin x = 0{,}8$ (لأن $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$).

4 - إنشاء هندسيا زاوية علمت القيمة المضبوطة لاحدى نسبها المثلثية

طريقة

لإنشاء هندسيا زاوية علمت القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية نكتب النسبة المثلثية على شكل كسر.

- إذا كانت النسبة المثلثية هي جيب أو جيب تمام الزاوية تنشئ مثلثا قائما فإن طول أحد ضلعي زاويته القائمة هو بسط الكسر و طول وتره هو مقامه.
- إذا كانت النسبة المثلثية هي ظل الزاوية تنشئ مثلثا قائما فإن طولا ضلعي زاويته القائمة هما بسط و مقام الكسر.

تمرين 1 • أنشئ دون استعمال المنقلة زاوية بحيث جيبها التمام هو $\frac{2}{5}$. تحقق بالحاسبة و بالمنقلة.

حل ليكن x قيس هذه الزاوية. لدينا $\cos x = \frac{2}{5}$.

هذه النسبة مكتوبة على شكل كسر مقامه 5 و بسطه 2. ليكن السنتيمتر هو وحدة الطول.

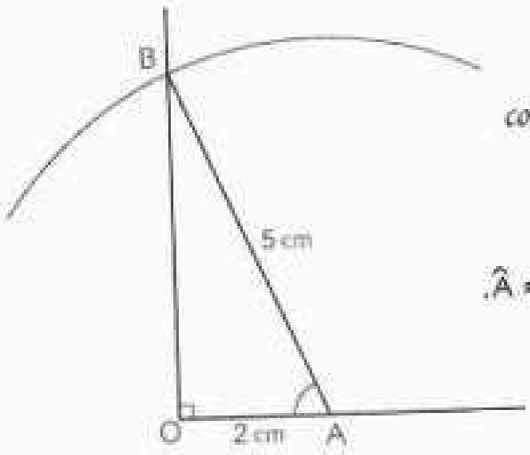
ننشئ زاوية قائمة رأسها O. نعين على أحد ضلعيها النقطة A بحيث $OA = 2\text{ cm}$

ثم نرسم الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 5 cm.

هذه الدائرة تقطع الضلع الثاني للزاوية القائمة في B.

في المثلث AOB القائم في O، لدينا : $\cos \hat{A} = \frac{OA}{AB} = \frac{2}{5}$

الزاوية $\widehat{OAB}$ هي حل.



التحقق بالحاسبة نجد : $\hat{A} \approx 66{,}4°$ بالمنقلة نقرأ : $\hat{A} \approx 66°$.

تمرين 2 • أنشئ، دون استعمال المنقلة، زاوية بحيث جيبها هو 0,36. تحقق بالحاسبة و بالمنقلة.

حل $\frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 0{,}36$ وحدة الطول هي المليمتر. ننشئ أولا زاوية قائمة رأسها O

و نعين على أحد أضلاعها النقطة A بحيث $OA = 9\ mm$.

نرسم الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 25 mm فتقطع الضلع الثاني للزاوية القائمة في النقطة B.

في المثلث القائم AOB في O لدينا : $\sin\hat{B} = \frac{OA}{AB} = \frac{9}{25} = \frac{36}{100}$

الزاوية $\hat{B}$ هي الحل.

التحقيق بالحاسبة نجد : $\hat{B} = 21{,}1°$ بالمنقلة نقرأ : $\hat{B} = 21°$

تمرين 3 • أنشئ ، دون استعمال المنقلة، زاوية ظلها 4,5. تحقق بالحاسبة و بالمنقلة.

حل $\frac{9}{2} = 4{,}5$ ننشئ أولا زاوية قائمة رأسها O.

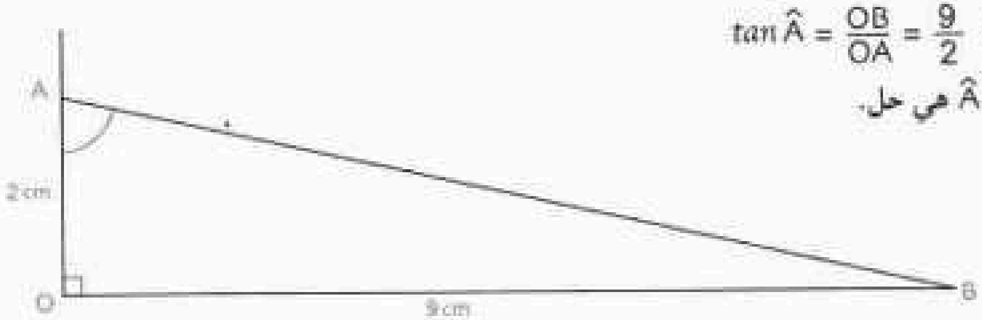
نعين على أحد ضلعي الزاوية القائمة النقطة A بحيث $OA = 2\ cm$

و على الضلع الثاني للزاوية القائمة النقطة B بحيث $OB = 9\ cm$.

في المثلث القائم AOB في O

لدينا : $\tan\hat{A} = \frac{OB}{OA} = \frac{9}{2}$

الزاوية $\hat{A}$ هي حل.



التحقق بالحاسبة : $\hat{A} = 77{,}5°$ بالمنقلة : $\hat{A} = 78°$

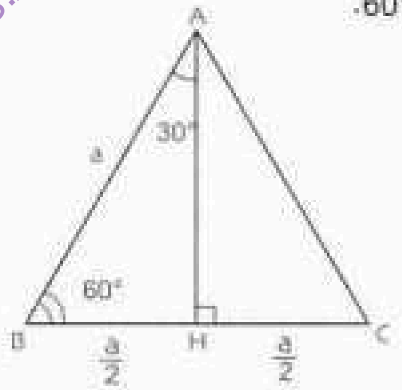
ملاحظة
• في الحالات الثلاث المدروسة، حوّلت النسبة المثلثية المعطاة إلى كسر.
• يتم اختيار وحدة الطول حسب قيمتي بسط و مقام هذا الكسر.

تمرين محلول

تمرين ABC مثلث متقايس الأضلاع، طول ظلعه a و [AH] إرتفاع له.

1 . أثبت أن $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2 . استنتج قيمة النسبة المثلثية المضبوطة لكل من الزاويتين 30° و 60°.



حل 1 . المثلث ABC متقايس الأضلاع.

بما أن كل عمود هو منصف و متوسط و المثلث AHB قائم في H

و بتطبيق نظرية فيثاغورث نحصل على :

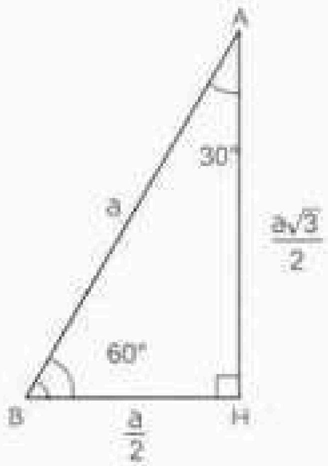
$AB^2 = AH^2 + BH^2$ و بالتعويض نجد : $a^2 = AH^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

إذن $AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

و بالتالي $AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ينتج أن : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2 . في المثلث AHB القائم في H لدينا :



$$\cos 30° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30° = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

ملاحظة
- نلاحظ أن $\cos 60° = \sin 30°$ و $\sin 60° = \cos 30°$.
- في هذه الحالة نقول عن المثلث AHB إنه نصف مثلث متقايس الأضلاع.