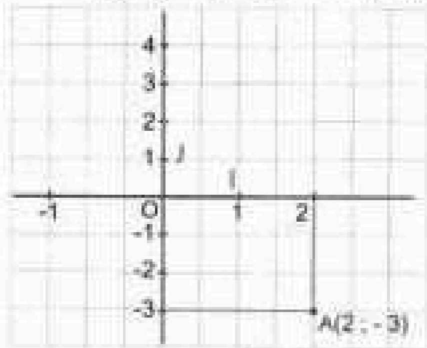
الدرس

معارف

1 - إحداثيا شعاع في المستوي المزود بمعلم

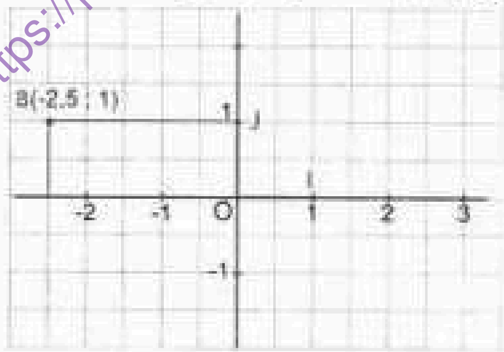
أ. احداثيا نقطة في المستوي المزود بمعلم

المستوي مزود بمعلم متعامد و غير متجانس. $OI \neq OJ$.



. إحداثيا النقطة A : فاصلة A هي 2 و ترتيب A هو -3 . نكتب $A(2 ; -3)$

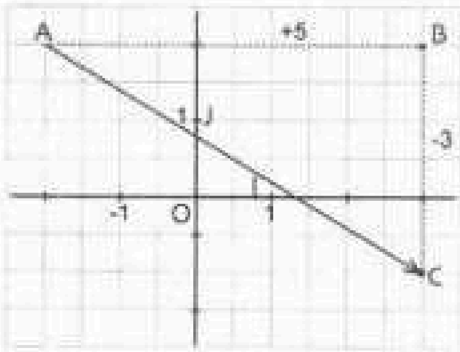
المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس. $OI = OJ$.



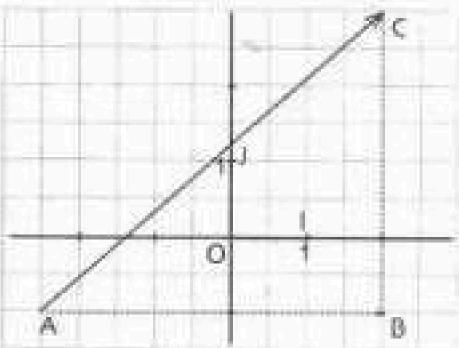
. إحداثيا النقطة B: فاصلة B هي -2,5 و ترتيب B هو 1. نكتب $B(-2,5 ; 1)$.

ب. احداثيا شعاع في معلم

المستوي مزود بمعلم حيث الاتجاه الموجب على المستقيم (OI) هو من O نحو I و الاتجاه الموجب على المستقيم (OJ) هو من O نحو J.



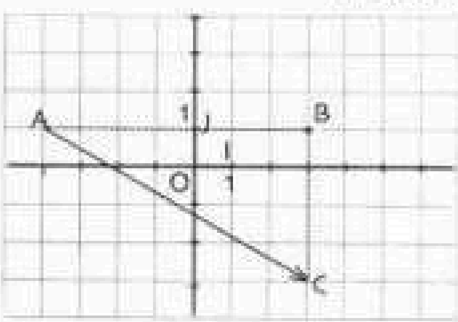
. إحداثيا الشعاع $\vec{AC}$: نزيح النقطة A حتى النقطة B بالتوازي مع المستقيم (OI) في الاتجاه الموجب و بخمس وحدات، ثم نزيح بثلاث وحدات النقطة B حتى النقطة C بالتوازي مع المستقيم (OJ) في الاتجاه السالب.



. إحداثيا الشعاع $\vec{AC}$ هما $(4,5 ; 4)$ نكتب $\vec{AC}\,(4,5 ; 4)$.

نقرأ إحداثيا الشعاع $\vec{AC}$ في المعلم و هما $(5 ; -3)$ و نكتب $\vec{AC}\,(5 ; -3)$.

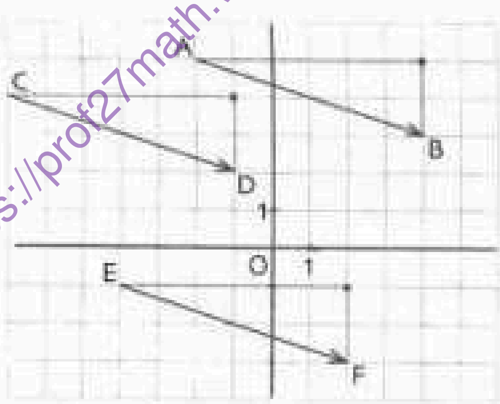
ملاحظة 1 يمكن تعيين الاتجاه الموجب بسهم على كل من المستقيمين المعينين للمعلم. للتنقل من النقطة A إلى النقطة C نتنقل من A إلى B ثم من B إلى C. نقرأ إحداثيي الشعاع $\vec{AC}$. و نكتب $\vec{AC}\,(7 ; -4)$.



ملاحظة 2 الانسحاب الذي شعاعه $\vec{AC}$ هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{AB}$ متبوع بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{BC}$ أي $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

جـ. إحداثيا شعاعين متساوين

المستوي مزود بمعلم



خاصية $\vec{AB}(x\,;y)$ و $\vec{CD}(x'\,;y')$ شعاعان.

• إذا كان $\vec{AB}=\vec{CD}$ فإن $x=x'$ و $y=y'$.

• إذا كان $x=x'$ و $y=y'$ فإن $\vec{AB}=\vec{CD}$.

مثال في الشكل المقابل، نقرأ $\vec{AB}(6\,;-2)$، $\vec{CD}(6\,;-2)$، $\vec{EF}(6\,;-2)$ نكتب: $\vec{AB}=\vec{CD}=\vec{EF}$.

د. حساب إحداثيي شعاع علم مبدأه و نهايته

المستوي مزود بمعلم

خاصية إذا كان $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$ نقطتين فإن إحداثيا الشعاع $\vec{AB}$ هما $(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$.

مثال $A(5\,;3)$ و $B(2\,;1)$ نقطتان من المستوي المزود بمعلم.

لدينا : $x_B-x_A=2-5=-3$ و $y_B-y_A=1-3=-2$ إذن $\vec{AB}(-3\,;-2)$.

ملاحظة معاكس كل من (x_B-x_A) و (y_B-y_A) هما على الترتيب (x_A-x_B) و (y_A-y_B) و هما إحداثيا $\vec{BA}$. أي إحداثيا $\vec{BA}$ هما معاكسا إحداثيي $\vec{AB}$ على الترتيب.

هـ. حساب إحداثيي منتصف قطعة مستقيم علم إحداثيا طرفيها

خاصية $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$ نقطتان.

إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن إحداثيي I هما $(x_I\,;y_I)$ بحيث $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.

مثال $A(-3\,;+2)$ و $B(-7\,;6)$ نقطتان. إحداثيا النقطة I منتصف $[AB]$ هما $(x_I\,;y_I)$ بحيث :

$x_I=\dfrac{-3-7}{2}=-5$ و $y_I=\dfrac{2+6}{2}=4$، نكتب: $B(-5;\,4)$.

2 - المسافة بين نقطتين في معلم متعامد و متجانس

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس.

خاصية إذا كان $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$ نقطتين فإن المسافة بين النقطتين A و B هي :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

مثال $A(2\,;5)$ و $B(-1\,;1)$ نقطتان.

لدينا $x_B-x_A=-1-2=-3$ و $y_B-y_A=1-5=-4$ ؛ $(x_B-x_A)^2=(-3)^2=9$

و $(y_B-y_A)^2=(-4)^2=16$ إذن $(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=9+16=25$.

و بالتالي $AB=\sqrt{25}$ أي $AB=5$.

طرائق

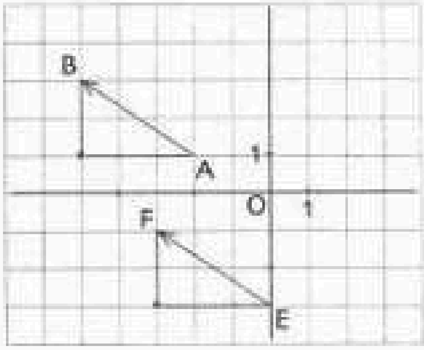
1 - تمثيل شعاع بمعرفة إحداثييه

خاصية لتمثيل شعاع علمت إحداثياه، نختار المبدأ و ننجز انسحاب أول وفق محور الفواصل ثم نتبعه بانسحاب ثان وفق محور التراتيب بقدر الأطوال المرفقة بالانسحابين و في الاتجاه المناسب.

تمرين 1 المستوى مزود بمعلم. أنشئ ممثلين للشعاع $\vec{u}\,(-3\,;\,+2)$.

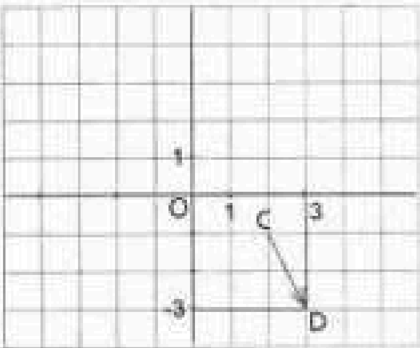
حل 1• رسم $\overrightarrow{AB}$ بحيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. نختار المبدأ A ثم ننشئ النهاية B للحصول على ممثل أول.
بما أن 3- سالب و 2 موجب فنقوم بالانسحاب موازيا لمحور الفواصل في الاتجاه السالب بطول 3 وحدات
ثم نقوم بإزاحة النقطة المحصل عليها بالانسحاب الثاني موازيا لمحور التراتيب في الاتجاه الموجب و بالطول 2.

2• رسم $\overrightarrow{EF}$ بحيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. نختار المبدأ E و نعين النهاية F.
للحصول على ممثل ثان للشعاع $\vec{u}$ نكمل برسم متوازي الأضلاع ABFE (يمكن اتباع الكيفية المطبقة لرسم $\overrightarrow{AB}$).



تمرين 2 أنشئ ممثلا للشعاع $\vec{u}\,(1\,;\,-2)$ نهايته $D(3\,;\,-3)$.

حل تعيين C بحيث $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$.
بما أن $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$ فإن $x_D - x_C = 1$ و $y_D - y_C = -2$
أي $3 - x_C = 1$ و $-3 - y_C = -2$
و بالتالي $x_C = 2$ و $y_C = -1$
إذن إحداثيا C هما $(2\,;\,-1)$. نكمل بتمثيل النقطة C.



2 - اثبات أن رباعيا عرفت إحداثيات رؤوسه هو متوازي الأضلاع

طريقة لإثبات أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع نثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
(أو أن للقطرين [AC] و [BD] نفس المنتصف).

تمرين لتكن $A(0\,;\,1)$ ؛ $B(0\,;\,3)$ ؛ $C(-3\,;\,0)$ ؛ $D(-2\,;\,-3)$ أربع نقط من المستوي المزود بمعلم.
أثبت أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع.

حل 1 $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A \,;\, y_B - y_A)$ أي $\overrightarrow{AB}(1\,;3)$.

$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D \,;\, y_C - y_D)$ أي $\overrightarrow{DC}(1\,;3)$.

للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ نفس الإحداثيات إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و بالتالي ABCD متوازي الأضلاع.

حل 2 I منتصف [AC] إذن $I\left(\frac{x_A + x_C}{2}\,;\frac{y_A + y_C}{2}\right)$ أي $I(-1\,;0)$

J منتصف [BD] إذن $J\left(\frac{x_B + x_D}{2};\frac{y_B + y_D}{2}\right)$ أي $J(-1\,;0)$

نلاحظ أن للنقطتين I و J نفس الإحداثيات. إذن I و J منطبقتان و بالتالي للقطرين [AC] و [BD] نفس المنتصف. ينتج أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع.

3 - تعيين طبيعة مثلث في معلم متعامد و متجانس

طريقة المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس. ABC مثلث علمت احداثيات رؤوسه.
لتعيين طبيعة المثلث ABC نحسب أطوال أضلاعه و نطبق الخواص المتعلقة بالمثلثات.

تمرين المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس.

1. ما هي طبيعة المثلث ABC حيث $A(6\,;-1)$ ، $B(2\,;3)$ ، $C(2\,;-5)$ ؟
2. إذا كانت وحدة الطول هي 1cm، احسب مساحة المثلث ABC .

حل 1. لدينا $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (3+1)^2}$

و لدينا $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

بعد التعويض و الحساب نجد $AB = \sqrt{32}$ ، $AC = \sqrt{32}$ و $BC = 8$.

نلاحظ أن $AB = AC$. إذن المثلث متساوي الساقين.

من جهة أخرى $AB^2 = 32$ ، $AC^2 = 32$ و $BC^2 = 64$.

إذن $BC^2 = AB^2 + AC^2$

و بالتالي المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين.

2. المثلث ABC قائم في A.

إذن مساحته هي $\frac{1}{2} AB \times AC$ أي $\frac{1}{2}\sqrt{32} \times \sqrt{32}$

و بالتالي : مساحة المثلث ABC هي $16cm^2$.

تمرين محلول

تمرين

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس.

$A(0 ; 2)$ ؛ $B(-4 ; 0)$ ؛ $C(-2 ; -4)$ ثلاث نقط.

1. أثبت أن المستقيمين (AB) و (BC) متعامدان.
2. عيّن النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.
3. عيّن إحداثيي مركز المربع $ABCD$.
4. احسب قطر الدائرة المحيطة بهذا المربع.

حل

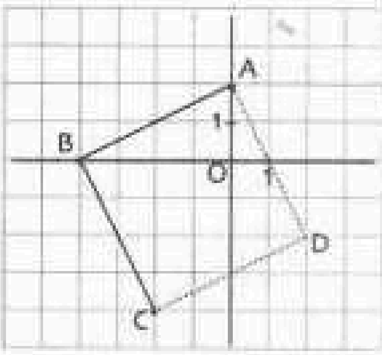
1. المستقيمان (AB) و (BC) يتقاطعان في B. للبرهان أنهما متعامدان يكفي البرهان أن المثلث ABC قائم في B أي أن $BA^2 + BC^2 = AC^2$.

نعلم أن $BA^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$ ؛ $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$

و $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$

بعد التعويض و الحساب نجد : $BA^2 = 20$ ؛ $BC^2 = 20$ و $AC^2 = 40$

إذن $BC^2 + BA^2 = AC^2$



2. من السؤال السابق، لدينا $\widehat{ABC} = 90°$ و $AB = BC$

نستنتج أن : حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا يكفي أن يكون $ABCD$ متوازي الأضلاع أي أن $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-4 ; -2)$ و $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D ; y_C - y_D)$

أي $\overrightarrow{DC}(-2 - x_D ; -4 - y_D)$

نحل المعادلتين $-2 - x_D = -4$ و $-4 - y_D = -2$

نجد $x_D = 2$ و $y_D = -2$ أي $D(2 ; -2)$.

(يمكن التحقق على التمثيل المقابل).

3. لتكن I منصف القطعة $[AC]$ (أي قطر المربع). تعيين إحداثيي I.

لدينا $x_I = \frac{x_A - x_C}{2} = \frac{0 - 2}{2} = -1$ و $y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 - 4}{2} = -1$

إذن إحداثيا I مركز المربع $ABCD$ هما $(-1 ; -1)$

4. قطر الدائرة المحيطة بالمربع هو قطر المربع أي AC.

حسب السؤال 1 لدينا : $AC^2 = 40$

نستنتج أن $AC = \sqrt{40}$ أي $AC = 2\sqrt{10}$.

إذن قطر الدائرة المحيطة بالمربع هو $2\sqrt{10}$ (بوحدة الطول المختارة).