مستقيم المنتصفين

تعريف : **مستقيم المنتصفين** في مثلث هو مستقيم يشمل منتصفَيْ ضلعين في هذا المثلث.

I) مستقيم المنتصفين : النظرية المباشرة

نشاط 1 : (وضع تخمينات)

1. ارسم عدة مثلثات (على الأقل 3) ثم عيِّن في كل مثلث منتصفَيْ ضلعين من أضلاعه.
2. ارسم في كل حالة المستقيم الذي يشمل المنتصفين.
   (أ) كيف يبدو المستقيم الذي يشمل المنتصفين بالنسبة لحامل الضلع الثالث ؟
   (ب) قارن بين طول القطعة الواصلة بين المنتصفين و طول الضلع الثالث.

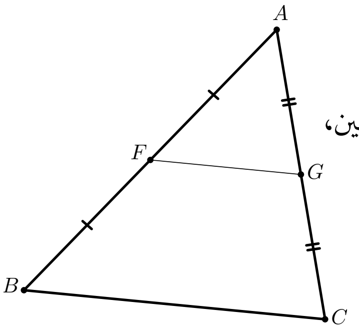
نشاط 2 : (إثبات نظرية مستقيم المنتصفين)

1. ارسم مثلثا TPR ثم عيِّن النقطة I، منتصف الضلع $[TP]$ و النقطة K، منتصف الضلع $[PR]$.
   أنشئ النقطة M، نظيرة K بالنسبة إلى I .
2. (أ) برهن أنّ الرباعي $TMPK$ متوازي أضلاع.
   (ب) استنتج أنّ المستقيمين (TM) و (PK) متوازيان و أنّ $TM = PK$.
3. (أ) برهن أنّ المستقيمين (TM) و (KR) متوازيان.
   (ب) برهن أنّ $TM = KR$.
   (ج) استنتج أنّ الرباعي $TMKR$ متوازي أضلاع.
4. برهن أنّ المستقيمين (IK) و (TR) متوازيان.
5. برهن أنّ $IK = \dfrac{TR}{2}$.
6. انقل و أتمّ :
   «في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصفَيْ ضلعين ...»
7. انقل و أتمّ :
   «في مثلث، طول القطعة الواصلة بين منتصفَيْ ضلعين يساوي ...»

نظرية : في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصفَيْ ضلعين يوازي حامل الضلع الثالث و طول القطعة الواصلة بين هذين المنتصفين يساوي **نصف** طول الضلع الثالث.

ملاحظة : هذه النظرية تسمح لنا بإثبات أنّ مستقيمين متوازيان و بحساب طول قطعة.

مثال : في المثلث ABC لدينا :



- F منتصف $[AB]$
- و G منتصف $[AC]$.

فحسب نظرية مستقيم المنتصفين، نستنتج أنّ :

- (FG) يوازي (BC)
- و $FG = \dfrac{1}{2}BC$.

تطبيق

1 مثلث RST بحيث :
$RS = 6,4\,\text{cm}$ ، $ST = 8\,\text{cm}$ و $RT = 4,5\,\text{cm}$.
E منتصف $[TR]$ ، F منتصف $[RS]$ و G منتصف $[TS]$.

1. احسب الطول EF مع التعليل.
2. ما الذي يمكن قوله عن المستقيمين (TR) و (GF) ؟ علِّل.
3. (أ) ما الذي يمكن قوله عن المستقيمين (RS) و (EG) ؟ علِّل.
   (ب) احسب الطول EG مع التعليل.

II) مستقيم المنتصفين : النظرية العكسية

نشاط 1 : (وضع تخمينات)

1. ارسم مثلثا ABC ثم عيِّن النقطة M، منتصف $[AB]$.
   ارسم المستقيم (d) الذي يشمل M و يوازي (BC) و لتكن K نقطة تقاطعه مع (AC) .
2. (أ) قارن بين الطولين KA و KC .
   ماذا تمثل النقطة K بالنسبة للضلع $[AC]$ ؟
   (ب) ما الذي يمكن قوله عن المستقيم الذي يشمل منتصف ضلع في مثلث و يوازي حامل ضلع ثانٍ؟

نشاط 2 : (إثبات النظرية العكسية لنظرية مستقيم المنتصفين)

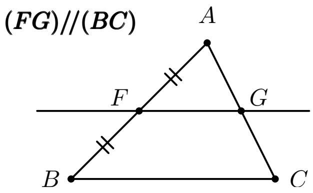
1. على شكل النشاط السابق، أنشئ النقطة N بحيث يكون الرباعي $MNCB$ متوازي أضلاع.
2. (أ) برهن أنّ المستقيمين (AM) و (NC) متوازيان و أنّ $AM = NC$.
   (ب) استنتج أنّ الرباعي $AMCN$ متوازي أضلاع.
3. برهن أنّ النقطة K هي منتصف الضلع $[AC]$.
4. انقل و أتمّ :
   «في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصف ضلع و يوازي حامل ضلع ثانٍ يقطع الضلع الثالث في ...»

نظرية : في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصف أحد الأضلاع و يوازي حامل ضلع ثانٍ يقطع الضلع الثالث في منتصفه.

ملاحظة : هذه النظرية تسمح لنا بإثبات أنّ نقطة هي منتصف قطعة.

مثال : في المثلث ABC لدينا :

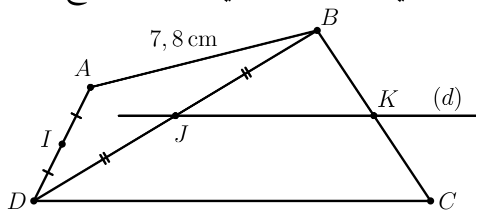
- F منتصف $[AB]$
- و (FG) يوازي (BC) .



فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين،
نستنتج أنّ G منتصف $[AC]$.

تطبيق

2 $ABCD$ رباعي فيه : I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BD]$.
المستقيم (d) الذي يشمل J و يوازي (DC)، يقطع $[BC]$ في K .



1. برهن أنّ (IJ) يوازي (AB) .
2. احسب الطول IJ .
3. بيّن أنّ K منتصف $[BC]$.

III) تطبيقات

3 A ، B و C ثلاث نقط ليست على نفس الاستقامة.
E هي نظيرة A بالنسبة إلى B و F هي نظيرة A بالنسبة إلى C .
برهن أنّ $FE = 2 \times BC$.

4 ارسم مثلثا EFG بحيث :
$EF = 8,4\,\text{cm}$ ، $FG = 5,2\,\text{cm}$ و $EG = 6,6\,\text{cm}$
ثمّ عيِّن النقط I ، J و K ، منتصفات أضلاعه $[EF]$ ، $[FG]$ و $[EG]$ على الترتيب.
احسب محيط المثلث IJK مع التعليل.

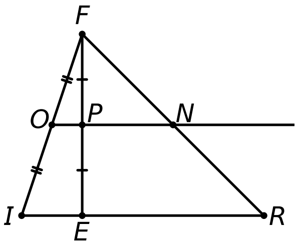
5 $CIRE$ معيّن. K منتصف $[IR]$ و J منتصف $[RE]$.
برهن أنّ $(KJ) \perp (CR)$.

6 $COTE$ متوازي أضلاع مركزه A .
I منتصف $[OT]$ و J منتصف $[TE]$.
برهن أنّ الرباعي $AITJ$ متوازي أضلاع.

7 $ABCD$ مستطيل مركزه J بحيث :
$AB = 8\,\text{cm}$ و $BC = 6\,\text{cm}$.
المستقيم الذي يشمل J و يعامد (AB)، يقطع $[AB]$ في I .
النقطة K هي منتصف $[BC]$.
احسب محيط الرباعي $IBKJ$ مع التعليل.

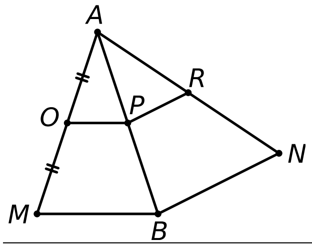
8 $COTE$ رباعي كيفي غير متصالب.
B ، A ، I و N منتصفات أضلاعه $[CO]$ ، $[OT]$ ، $[TE]$ و $[EC]$ على الترتيب.
1. برهن أنّ الرباعي $BAIN$ متوازي أضلاع.
2. ما الذي يمكن قوله عن $BAIN$ إذا كان $OE = CT$ ؟
3. ما الذي يمكن قوله عن $BAIN$ إذا كان $(OE) \perp (CT)$ ؟

9 في الشكل المقابل :
$O \in [FI]$
$P \in [FE]$
$N \in [FR]$
$P \in [ON]$
$E \in [IR]$



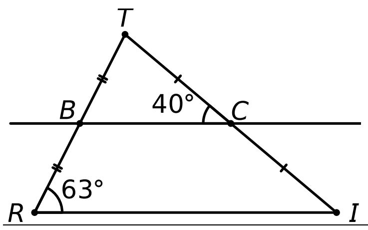
1. برهن أنّ $(OP) // (IE)$.
2. برهن أنّ N منتصف $[FR]$.

10 في الشكل المقابل :
$(OP) // (MB)$
$(PR) // (BN)$

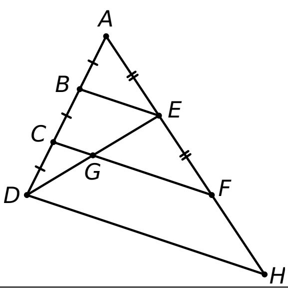


برهن أنّ $(OR) // (MN)$.

11 تمعن في الشكل المقابل ثم احسب قيس الزاوية $\widehat{RTI}$ مع التعليل.



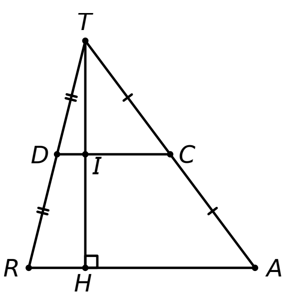
12 تمعن في الشكل المقابل الذي فيه $(BE) // (DH)$.



1. برهن أنّ $(BE) // (CF)$.
2. برهن أنّ G منتصف $[DE]$.
3. أثبت أنّ $FH = EF = AE$.

13 وحدة الطول هي السنتيمتر.
1. ارسم مثلثا ABC بحيث $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $BC = 3$.
2. عيِّن I ، منتصف $[AC]$ ثم أنشئ D ، نظيرة B بالنسبة إلى I .
ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟ علِّل.
3. أنشئ F ، نظيرة B بالنسبة إلى (AC) .
برهن أنّ $(DF) // (AC)$.

14 تمعن في الشكل المقابل ثم برهن أنّ مساحة المثلث TAR تساوي أربعة أضعاف مساحة المثلث TDC .



﴾ الحلول ﴿

I) النظرية المباشرة

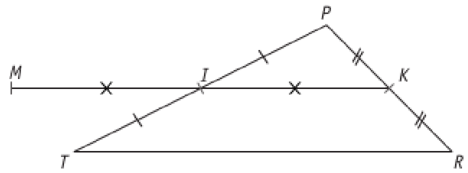
نشاط 1 : (وضع تخمينات)

(1) الأشكال.

(2) (أ) يبدو المستقيم الذي يشمل المتصفين موازيا لحامل الضلع الثالث.

(ب) نلاحظ في كل مرة أنّ طول القطعة الواصلة بين المتصفين يساوي نصف طول الضلع الثالث.

نشاط 2 : (إثبات نظرية مستقيم المتصفين)



(1) (أ) و (ب) : انظر الشكل.

(2) (أ) من جهة، I منتصف $[TP]$ و من جهة أخرى I منتصف $[MK]$ (لأنّ M نظيرة K بالنسبة إلى I) إذن قطرا الرباعي $TMPK$ متناصفان و بالتالي $TMPK$ متوازي أضلاع.

(ب) في متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين متقايسان و حاملاهما متوازيان.

نستنتج إذن أنّ $TM = PK$ و $(TM)//(PK)$.

(3) (أ) بما أنّ K منتصف $[PR]$ فإنّ النقط K ، P و R على استقامة واحدة و $PK = KR$ ، إذن فالمستقيمان (PK) و (KR) متطابقان (نفس المستقيم).

من السؤال السابق لدينا: $(TM)//(PK)$.

نستنتج إذن أنّ $(TM)//(KR)$.

(ب) بما أنّ $TM = PK$ و $PK = KR$ فإنّ $TM = KR$.

(ج) في الرباعي غير المتصالب $TMKR$ لدينا :

$TM = KR$ و $(TM)//(KR)$

إذن فهو متوازي أضلاع.

(4) بما أنّ $TMKR$ متوازي أضلاع فإنّ $(MK)//(TR)$ و بما أنّ $I \in (MK)$ فإنّ $(IK)//(TR)$.

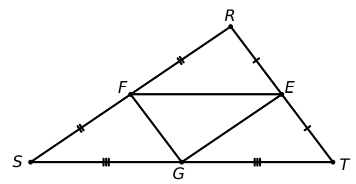
(5) بما أنّ $TMKR$ متوازي أضلاع فإنّ $MK = TR$ منه :

$$IK = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2}TR$$

(6) «في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصفَي ضلعين **يوازي حامل الضلع الثالث.**»

(7) «في مثلث، طول القطعة الواصلة بين منتصفَي ضلعين يساوي **نصف طول الضلع الثالث.**»

1



(1) في المثلث RST لدينا :

- النقطة E هي منتصف الضلع $[RT]$ ؛
- و النقطة F هي منتصف الضلع $[RS]$.

فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ :

$(EF)//(ST)$ و $EF = \frac{1}{2}ST = \frac{1}{2} \times 8\,\text{cm} = \mathbf{4}\,\text{cm}$.

(2) في المثلث RST لدينا :

- النقطة G هي منتصف الضلع $[ST]$ ؛
- و النقطة F هي منتصف الضلع $[RS]$.

فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ :

$(GF)//(RT)$ (و $GF = \frac{1}{2}RT$).

(3) (أ) في المثلث RST لدينا :

- النقطة G هي منتصف الضلع $[ST]$ ؛
- و النقطة E هي منتصف الضلع $[RT]$.

فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ :

$(EG)//(RS)$ (و $EG = \frac{1}{2}RS$).

(ب) من السؤال السابق :

$$EG = \frac{1}{2}RS = \frac{1}{2} \times 6,4\,\text{cm} = \mathbf{3,2}\,\text{cm}$$

II) النظرية العكسية

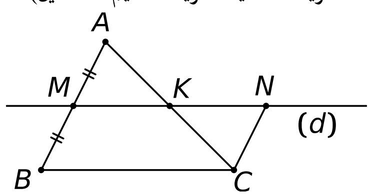
نشاط 1 : (وضع تخمينات)

(1) انظر شكل النشاط الموالي.

(2) (أ) نلاحظ أنّ $KA = KB$ أي K منتصف $[AC]$.

(ب) نلاحظ أنّ المستقيم الذي يشمل منتصف ضلع في مثلث و يوازي حامل ضلع ثانٍ ، يقطع الضلع الثالث في منتصفه.

نشاط 2 : (إثبات النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين)



(1) انظر الشكل.

(2) (أ) بما أنّ $MNCB$ متوازي أضلاع فإنّ $(MB)//(NC)$ و $MB = NC$ ؛ و بما أنّ $M \in [AB]$ فإنّ $(AM)//(NC)$.

لكن $AM = MB$ إذن $AM = NC$.

(ب) لدينا إذن: $AM = NC$ و $(AM)//(NC)$ و بالتالي فالرباعي (غير المتصالب) $AMCN$ متوازي أضلاع.

(3) بما أنّ $AMCN$ متوازي أضلاع فإنّ قطريه $[AC]$ و $[MN]$ متناصفان إذن K هي منتصف $[AC]$ (و K هي منتصف $[MN]$) .

(4) «في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصف ضلع و يوازي حامل ضلع ثانٍ يقطع الضلع الثالث في **منتصفه.**»

2

(1) في المثلث ABD لدينا :

- النقطة I هي منتصف الضلع $[AD]$ ؛
- و النقطة J هي منتصف الضلع $[BD]$.

فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ :

$(IJ)//(AB)$ (و $IJ = \frac{1}{2}AB$).

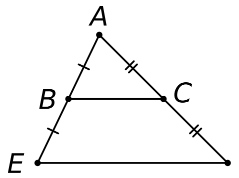
(2) حسب السؤال السابق :

$$IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 7,8\,\text{cm} = \mathbf{3,9}\,\text{cm}$$

(3) في المثلث BCD ، المستقيم (d) يشمل J، منتصف الضلع $[BD]$ و يوازي حامل الضلع $[CD]$ ، فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ (d) يقطع الضلع الثالث $[BC]$ في منتصفه أي النقطة K هي منتصف الضلع $[BC]$.

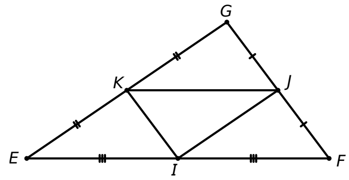
III) تطبيقات

3 بما أنّ E نظيرة A بالنسبة إلى B فإنّ B منتصف $[AE]$ ؛ و بما أنّ F نظيرة A بالنسبة إلى C فإنّ C منتصف $[AF]$.



في المثلث AEF لدينا إذن : B منتصف $[AE]$ و C منتصف $[AF]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(BC)//(EF)$ و $BC = \frac{1}{2}EF$ منه $EF = 2 \times BC$.

4

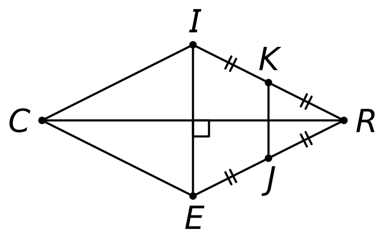


- في المثلث EFG لدينا : I منتصف $[FE]$ و J منتصف $[FG]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(IJ)//(EG)$ و $IJ = \frac{1}{2}EG$ إذن : $IJ = EG \div 2 = 6,6\,\text{cm} \div 2 = 3,3\,\text{cm}$.
- في المثلث EFG لدينا : I منتصف $[FE]$ و K منتصف $[GE]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(IK)//(GF)$ و $IK = \frac{1}{2}GF$ إذن : $IK = GF \div 2 = 5,2\,\text{cm} \div 2 = 2,6\,\text{cm}$.
- في المثلث EFG لدينا : J منتصف $[FG]$ و K منتصف $[GE]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(JK)//(FE)$ و $JK = \frac{1}{2}FE$ إذن : $JK = FE \div 2 = 8,4\,\text{cm} \div 2 = 4,2\,\text{cm}$.

محيط المثلث IJK هو إذن :

$$\mathcal{P} = IJ + IK + JK = 3,3\,\text{cm} + 2,6\,\text{cm} + 4,2\,\text{cm} = \mathbf{10,1}\,\text{cm}$$

5

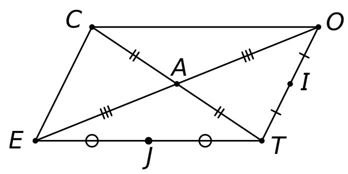


بما أنّ $CIRE$ معيّن فإنّ قطريه متعامدان أي $(IE) \perp (CR)$.

في المثلث IRE لدينا : K منتصف $[IR]$ و J منتصف $[RE]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(KJ)//(IE)$ (و $KJ = \frac{1}{2}RE$).

لدينا إذن $(IE) \perp (CR)$ و $(KJ)//(IE)$ و بالتالي $(KJ) \perp (CR)$ (إذا عامد مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يعامد الآخر).

6



- في المثلث OTE لدينا : A منتصف $[OE]$ و I منتصف $[OT]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(AI)//(ET)$ و $AI = \frac{1}{2}ET$.

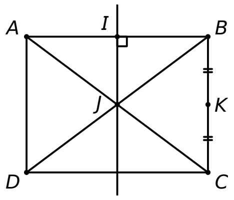
و بما أنّ $J \in [TE]$ فإنّ $(AI)//(JT)$ ....(1).

- في المثلث OTE لدينا : A منتصف $[OE]$ و J منتصف $[ET]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(AJ)//(OT)$ و $AJ = \frac{1}{2}OT$.

و بما أنّ $I \in [OT]$ فإنّ $(AJ)//(TI)$ ....(2).

من (1) و (2) نستنتج أنّ الرباعي $AITJ$ متوازي أضلاع (فيه كل ضلعين متقابلين حاملاهما متوازيان).

7



بما أنّ $ABCD$ مستطيل فإنّ قطريه متناصفان (و متقايسان) إذن J هي منتصف $[AC]$.

بما أنّ $(IJ) \perp (AB)$ و $(BC) \perp (AB)$ فإنّ $(IJ)//(BC)$ (المستقيمان العموديان على نفس المستقيم هما مستقيمان متوازيان).

في المثلث ABC لدينا : J منتصف $[AC]$ و $(IJ)//(BC)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (IJ) يقطع الضلع الثالث $[AB]$ في منتصفه إذن I هي منتصف $[AB]$ ؛ كما نستنتج أنّ $IJ = \frac{1}{2}BC$ أي :

$IJ = BC \div 2 = 6\,\text{cm} \div 2 = 3\,\text{cm}$.

و بما أنّ K منتصف $[BC]$ فإنّ $IJ = BK$.

في المثلث ABC لدينا : J منتصف $[AC]$ و K منتصف $[BC]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(JK)//(AB)$ و $JK = \frac{1}{2}AB$ منه :

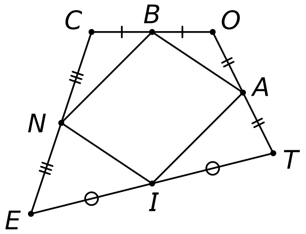
$JK = AB \div 2 = 8\,\text{cm} \div 2 = \mathbf{4}\,\text{cm}$.

و بما أنّ I منتصف $[AB]$ فإنّ $IB = JK$.

في الأخير، محيط الرباعي هو :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= IB + BK + KJ + JI \\ &= 2 \times KJ + 2 \times JI \\ &= 2\,(KJ + JI) \\ &= 2 \times 7\,\text{cm} = \mathbf{14}\,\text{cm}\end{aligned}$$

8



(1)
- في المثلث COT لدينا : B منتصف $[OC]$ و A منتصف $[OT]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ

$BA = \frac{1}{2}CT$ و $(BA)//(CT)$ .... (1)

- في المثلث CET لدينا : N منتصف $[CE]$ و I منتصف $[TE]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ :

$NI = \frac{1}{2}CT$ و $(NI)//(CT)$ .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أنّ $BA = NI$ و $(BA)//(NI)$ إذن للرباعي (غير المتصالب) $BAIN$ ضلعان متقابلان متقايسان و حاملاهما متوازيان و بالتالي فهو متوازي أضلاع.

(2) في المثلث COE لدينا : B منتصف $[OC]$ و N منتصف $[CE]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(NB)//(OE)$ و $NB = \frac{1}{2}OE$.

إذا كان $OE = CT$ فإنّ $NB = \frac{1}{2}CT$ أي $NB = AB$ و NA و بالتالي $BAIN$ هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان و متقايسان إذن فهو معيّن.

(3) من الأسئلة السابقة : $(BN)//(OE)$ و $(BA)//(CT)$ و بالتالي إذا كان $(OE) \perp (CT)$ فإنّ $(BN) \perp (BA)$ أي $\widehat{NBA} = 90°$.

في الأخير، $BAIN$ هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة إذن فهو مستطيل.

9

(1) في المثلث FIE لدينا : O منتصف $[FI]$ و P منتصف $[FE]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(OP)//(IE)$ (و $OP = \frac{1}{2}IE$) .

(2) بما أنّ $P \in [ON]$ ، $E \in [IR]$ و $(OP)//(IE)$ فإنّ $(PN)//(ER)$.

في المثلث FER لدينا إذن : P منتصف $[FE]$ و $(PN)//(ER)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (PN) يقطع الضلع الثالث $[FR]$ في منتصفه إذن N هي منتصف $[FR]$ (كما نستنتج أنّ $PN = \frac{1}{2}ER$).

10 حتى نبرهن أنّ $(OR)//(MN)$ ، سنبرهن أولا أنّ P منتصف $[AB]$ و أنّ R منتصف $[AN]$ ثم نطبق نظرية مستقيم المتصفين في المثلث AMN .

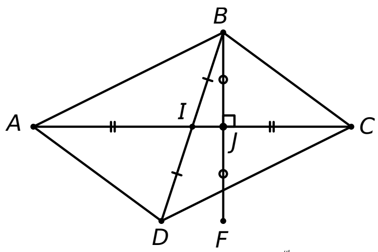
- __إثبات أنّ P منتصف $[AB]$__ : في المثلث AMB لدينا : O منتصف $[AM]$ و $(OP)//(MB)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (OP) يقطع الضلع الثالث $[AB]$ في منتصفه إذن P هي منتصف $[AB]$.
- __إثبات أنّ R منتصف $[AN]$__ : في المثلث ABN لدينا : P منتصف $[AB]$ و $(PR)//(BN)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (PR) يقطع الضلع الثالث $[AN]$ في منتصفه إذن R هي منتصف $[AN]$.

- **إثبات أنّ $(OR) /\!/ (MN)$** : في المثلث AMN لدينا :
O منتصف $[AM]$ و R منتصف $[AN]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(OR) /\!/ (MN)$.

11 في المثلث RTI لدينا : C منتصف $[TI]$ و B منتصف $[RT]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(BC) /\!/ (RI)$.
المستقيمان (BC) و (RI) متوازيان و مقطوعان بالقاطع (TR) نستنتج إذن أنّ الزاويتين المتماثلتين $\widehat{TBC}$ و $\widehat{TRI}$ متقايستان أي $\widehat{TBC} = \widehat{TRI} = 63°$.
و بما أنّ مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي $180°$ فإنّ :
$$\widehat{BTC} = 180° - (63° + 40°) = \mathbf{77°}$$

12
1. في المثلث ACF لدينا : B منتصف $[AC]$ و E منتصف $[AF]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(BE) /\!/ (CF)$.
2. في المثلث BDE لدينا : C منتصف $[BD]$ و $(CF) /\!/ (BE)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (CF) يقطع الضلع الثالث $[DE]$ في منتصفه إذن G هي منتصف $[DE]$.
3. في المثلث DEH لدينا : G منتصف $[DE]$ و $(CF) /\!/ (DH)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (CF) يقطع الضلع الثالث $[EH]$ في منتصفه إذن F هي منتصف $[EH]$ و بالتالي :
$$FH = EF = AE$$

13



1. انظر الشكل.
2. انظر الشكل.
بما أنّ D نظيرة B بالنسبة إلى I فإنّ I منتصف $[BD]$.
قطرا الرباعي $ABCD$ هما إذن متناصفان و بالتالي فهو متوازي أضلاع.
3. بما أنّ F نظيرة B بالنسبة إلى (AC) فإنّ المستقيم (AC) هو محور القطعة $[BF]$ و بالتالي إذا كانت J منتصف $[BF]$ فإنّ J تنتمي إلى المحور (AC) .
في المثلث BDF لدينا : I منتصف $[BD]$ و J منتصف $[BF]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(IJ) /\!/ (DF)$.
و بما أنّ النقطتين I و J تنتميان إلى المستقيم (AC) فإنّ $(AC) /\!/ (DF)$.

14 في المثلث TRA لدينا : D منتصف $[TR]$ و C منتصف $[TA]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(CD) /\!/ (RA)$ و $CD = \frac{1}{2}RA$.
لكن $(TH) \perp (RA)$ ، إذن $(TH) \perp (CD)$ (إذا عامد مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يعامد الآخر) و هذا يعني أنّ (TH) هو الارتفاع المتعلق بالضلع $[CD]$ في المثلث TCD .
في المثلث TRH لدينا : D منتصف $[TR]$ و $(RH) /\!/ (CD)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (CD) يقطع الضلع الثالث $[TH]$ في منتصفه إذن I هي منتصف $[TH]$ و بالتالي $TI = \frac{1}{2}TH$.
مساحة المثلث TAR هي : $\mathcal{A}_{TAR} = \frac{1}{2}RA \times TH$
و مساحة المثلث TDC هي :
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{TDC} &= \tfrac{1}{2}CD \times TI \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}RA \times \tfrac{1}{2}TH\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}RA \times TH\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}RA \times TH\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_{TAR}\end{aligned}$$
إذن $\mathcal{A}_{TAR} = 4 \times \mathcal{A}_{TDC}$.