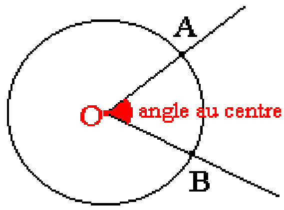
الزوايا المركزية و الزوايا المحيطية في دائرة



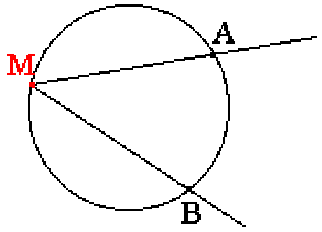
<u>الزاوية المركزية</u>

A و B نقطتان من الدائرة التي مركزها O

الزاوية $A\hat{O}B$ تسمى زاوية مركزية

تعريف :

في الدائرة كل زاوية رأسها هو مركز الدائرة تسمى زاوية مركزية



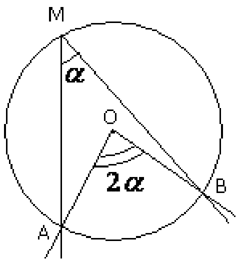
<u>الزاوية المحيطية</u>

A وB وM ثلاث نقط من الدائرة ©

الزاوية $A\hat{M}B$ تسمى زاوية محيطية

<u>تعريف</u>

كل زاوية ينتمي رأسها لدائرة وضلعيها يقطعان هذه الدائرة في نقطتين تسمى زاوية محيطية



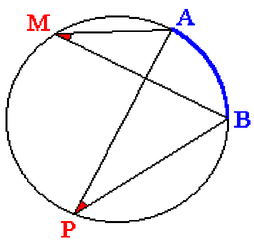
<u>خاصة 1:</u>

قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المرتبطة بها.

$$A\hat{M}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$$

<u>خاصة 2</u>

إذا حصرت زاويتان محيطيتان في دائرة نفس القوس فإنهما تكونان متقايستين.

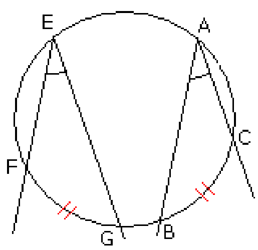


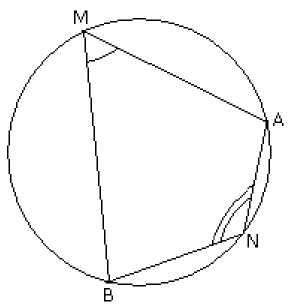
<u>خاصة 3</u>

زاويتان محيطيتان متقايستان في دائرة، تحصران قوسين متقايسين.

<u>خاصة 4 :</u>

زاويتان محيطيتان في دائرة تحصران قوسين متقايستين هما زاويتان متقايستان.

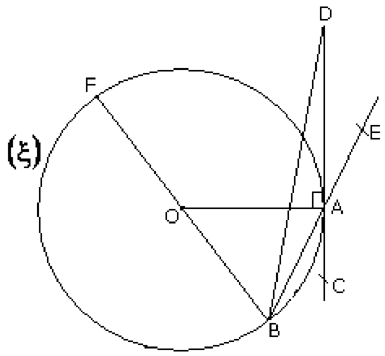




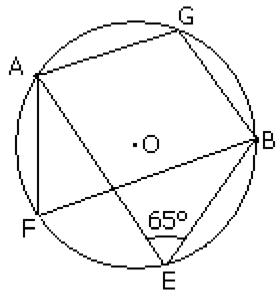
<u>خاصة 5 :</u>

زاويتان محيطيتان في دائرة تحصران قوسين لهما نفس الطرفين و رأساهما لا ينتميان إلى نفس القوس، هما زاويتان متكاملتان

نصوص التمارين



1) انطلاقا من الشكل التالي : حيث (ξ) دائرة مركزها O
حدد الزوايا المحيطية من بين الزوايا التالية :
$[B\hat{A}C]$, $[C\hat{A}E]$, $[A\hat{B}D]$, $[A\hat{O}B]$, $[E\hat{A}D]$
$[D\hat{A}F]$, $[D\hat{B}F]$, $[C\hat{D}B]$



2) في الشكل التالي (ξ) دائرة مركزها O
حدد قياس الزوايا :
$[A\hat{F}B]$, $[A\hat{O}B]$, $[A\hat{G}B]$

3) ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A و (ξ) الدائرة المحيطة به . لتكن M
نقطة تنتمي إلى القوس الصغرى [BC] ($M \neq C$ و $M \neq B$)
بين أن نصف المستقيم (MA] هو منصف الزاوية $[B\hat{M}C]$

4) لتكن (ξ) دائرة محيطة بمثلث ABC متساوي الأضلاع و M نقطة تنتمي إلى القوس الصغرى [AB]
أحسب قياسات الزوايا $[A\hat{M}C]$, $[C\hat{M}B]$, $[A\hat{M}B]$

5) (ξ) و (ξ') دائرتان لهما نفس الشعاع r و متقاطعتان في A و B لتكن O مركز (ξ) و O' مركز (ξ') . (Δ)
مستقيم مار من A يقطع (ξ) في M ($M \neq A$ و $M \neq B$) و (ξ') في M'
($M' \neq A$ و $M' \neq B$) .
أ) بين أن الرباعي AOBO' معين.
ب) استنتج أن المثلث MBM' متساوي الساقين.

6) لتكن (ξ) دائرة مركزها O و [AB] و [CD] قطرين حاملاهما متعامدان . ولتكن M نقطة من القوس الصغرى
[AC] بحيث $M \neq A$ و $M \neq C$
أحسب قياسات الزوايا $[A\hat{M}D]$ و $[C\hat{M}B]$ و $[B\hat{M}D]$ و $[A\hat{M}C]$
و $[A\hat{M}B]$ و $[C\hat{M}D]$

7) ليكن ABC مثلثا و O مركز الدائرة المحيطة به (ξ) .
المستقيمان (CO) و (BO) يقطعان الدائرة (ξ) في M و N على التوالي $M \neq C$ و $N \neq B$
أثبت أن $C\hat{A}N = B\hat{A}M$

8) ABC مثلث محاط بدائرة (ξ) مركزها O . المنصفان الداخلي و الخارجي للزاوية $[C\hat{A}B]$ يقطعان (ξ) في
D و D' .
أ) بين أن النقط D و D' و O مستقيمية.
ب) برهن أن (DD') واسط [BC] .

9) ليكن [AB] وتر في دائرة (ξ) مركزها O ولتكن I منتصف القوس الصغرى [AB] و C النقطة المقابلة قطريا للنقطة A (أي [AC] قطر في الدائرة (ξ)) . المستقيم المار من I و العمودي على (AC) يقطع [AB] في M .
المستقيم (IC) يقطع [AB] في N
أثبت أن IM=AM=MN

إنجاز الأستاذ: شهـبي عزالدين **إعدادية حان الفطواكي**

إنجاز الأستاذ: شهـبي عزالدين **إعدادية حان الفطواكي**

10) ليكن ABC مثلثا و O مركز دائرته المحيطة (ξ). المنصف الداخلي للزاوية $[B\hat{A}C]$ يقطع (ξ) في D .
المستقيم المار من D و الموازي للمستقيم (AB) يقطع (ξ) في E .($D \neq E$)
أثبت أن CD=AE

11) ليكن ABC مثلثا و(ξ) دائرته المحيطة. المنصف الداخلي للزاوية $[B\hat{A}C]$ يقطع (ξ) في O .
الدائرة (ξ') التي مركزها O وشعاعها OB تقطع [AO] في I .
أثبت أن I هي نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث ABC .

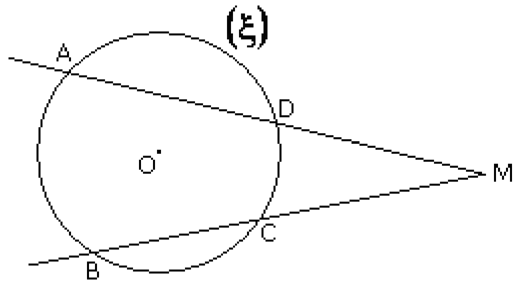
12) ليكن [AB] وتر في دائرة (ξ) و C نقطة تنتمي إلى المماس للدائرة (ξ) في النقطة A بحيث AC=AB
المستقيم (BC) يقطع الدائرة (ξ) في نقطة ثانية D ($D \neq B$)
أثبت أن المثلث ADC متساوي الساقين.

13) ليكن ABC مثلثا و O مركز دائرته المحيطة (ξ). و [AH] ارتفاع له و D هي نقطة تقاطع منصف الزاوية $[B\hat{A}C]$ مع (ξ) ($D \neq A$)
أثبت أن : (AD) هو منصف للزاوية $[O\hat{A}H]$

14) ABC مثلث متساوي الأضلاع و (ξ) الدائرة المحيطة به
لتكن D نقطة من القوس الصغرى [AB] و M نقطة منتمية إلى [DC] بحيث DM=DA
أ) برهن على أن المثلث DAM متساوي الأضلاع.
ب) (AM) يقطع (ξ) في E ($E \neq A$) برهن على أن الرباعي DMEB متوازي الأضلاع.
ج) برهن على أن المثلث MEC متساوي الأضلاع و أن DB=MC.
د) برهن على أن : DC = DA + DB .

15) (ξ) دائرة مركزها O . A و B نقطتان منتميتان إلى (ξ) A و B نقطتان منتميتان إلى (ξ)
تعتبر نقطة M خارج (ξ). (AM) يقطع (ξ) في D ($D \neq A$ و $D \in [AM]$)
(BM) يقطعها في C ($C \neq B$ و $C \in [BM]$)

برهن على أن : $A\hat{M}B = \frac{1}{2}(A\hat{O}B - D\hat{O}C)$



إنجاز الأستاذ: شهـبي عزالدين إعدادية حان الفطواكي

حلول التمارين

1) الزوايا المحيطية

$[B\hat{A}C]$, $[A\hat{B}D]$, $[D\hat{A}F]$, $[D\hat{B}F]$

2) $A\hat{F}B = A\hat{E}B = 65°$ محيطيتان في الدائرة (ξ) و تحصران نفس القوس

الزاوية $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{E}B]$

إذن $A\hat{O}B = 2A\hat{E}B$ و لدينا $A\hat{E}B = 65°$ إذن

$A\hat{O}B = 130°$

الزاوية $[A\hat{G}B]$ و $[A\hat{E}B]$ محيطيتان وتحصران قوسين لهما نفس الطرفين A و B و رأساهما G و E لا ينتميان إلى نفس القوس

إذن فهما متكاملتين

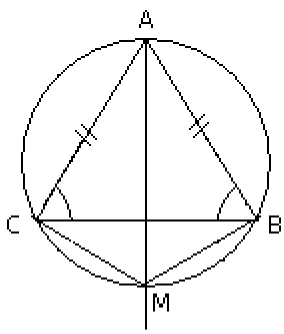
و منه $A\hat{G}B + A\hat{E}B = 180°$

أي $A\hat{G}B = 180° - A\hat{E}B$

أي $A\hat{G}B = 180° - 65°$

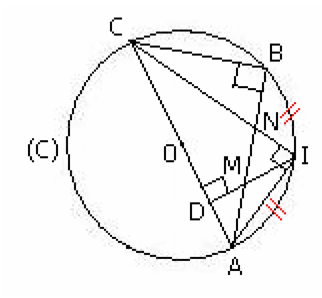
أي $A\hat{G}B = 115°$

3)



الزاويتان $[A\hat{M}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان

9)



ليكن D المسقط العمودي للنقطة I على المستقيم (AC)

المثلث DCI قائم الزاوية في D لأن (DC) و (ID) متعامدان

المثلث INA قائم الزاوية في I لأن [AC] قطر في (ξ)

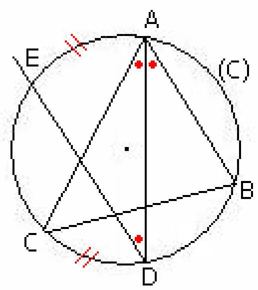
الزاويتان $[N\hat{C}A]$ و $[N\hat{A}I]$ محيطيتان وتحصران قوسين متقايسين [AI] و [IB] إذن فهما متقايستان

و بالتالي تكون متممتاهما $[M\hat{I}N]$ $[M\hat{N}I]$ على التوالي متقايستان أيضا و بالتالي فإن المثلث MIN متساوي الساقين في M و منه IM=MN (1)

و بالمثل نبين أن المثلث MIA متساوي الساقين في M ومنه IM=AM (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن IM=AM=MN

10)



نصف المستقيم [AD) منصف للزاوية $[C\hat{A}B]$ إذن الزاويتان $[C\hat{A}D]$ و $[D\hat{A}B]$ متقايستان.

الزاويتان $[A\hat{D}E]$ و $[D\hat{A}B]$

[$A\hat{C}B$] محيطيتان وتحصران نفس القوس [AB]

إذن $A\hat{M}B = A\hat{C}B$ **(1)**

الزاويتان [$A\hat{M}C$] و [$A\hat{B}C$] محيطيتان وتحصران نفس القوس [CA]

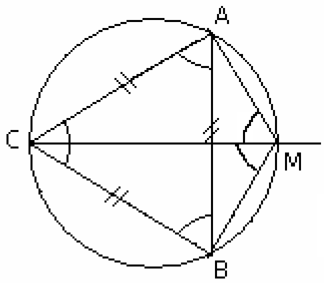
إذن $A\hat{M}C = A\hat{B}C$ **(2)**

و لدينا $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ **(3)** لأن المثلث ABC متساوي الساقين في A

و من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $A\hat{M}B = A\hat{M}C$

و بالتالي [MA) هو منصف الزاوية [$B\hat{M}C$].

4)



الزاويتان [$A\hat{M}C$] و [$A\hat{B}C$] محيطيتان وتحصران نفس القوس [CA]

إذن $A\hat{M}C = A\hat{B}C$

لدينا $A\hat{B}C = 60°$

لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع

إذن $A\hat{M}C = 60°$

الزاويتان [$C\hat{M}B$] و [$B\hat{A}C$] محيطيتان وتحصران نفس القوس [BC]

إذن $C\hat{M}B = B\hat{A}C$

لدينا $B\hat{A}C = 60°$ لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع

إذن $C\hat{M}B = 60°$

الزاويتان [$A\hat{M}C$] و [$C\hat{M}B$] متحاديتان و منه

$$A\hat{M}B = C\hat{M}B + A\hat{M}C$$
$$= 60° + 60°$$

أي $A\hat{M}B = 120$

<u>ملاحظة :</u>

يمكن إيجاد قياس الزاوية [$A\hat{M}B$] بملاحظة أنها و [$A\hat{C}B$] محيطيتان وتحصران قوسين لهما نفس الطرفين A و B و رأساهما M و C لا ينتميان إلى نفس القوس ، إذن [$A\hat{M}B$] و [$A\hat{C}B$] متكاملتان،

أي $A\hat{M}B + A\hat{C}B = 180°$ و $A\hat{C}B = 60°$

إذن $A\hat{M}B = 120°$

متقايستان لأنهما متبادلتان داخليا

و لأن (DE) و (AB) متوازيان و (AD) قاطع لهما.

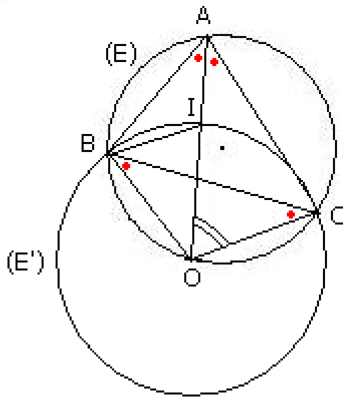
إذن الزاويتان المحيطيتان [$C\hat{A}D$] و [$A\hat{D}E$] متقايستان.

إذن فإنهما تحصران قوسين متقايسين [CD] و [AE]

و بالتالي وترين متقايسين

أي أن CD=AE

11)



لتكن (E') الدائرة التي مركزها هو O وشعاعها هو OB.

الزاويتان [$O\hat{A}B$] و [$O\hat{C}B$] متقايستان لأنهما محيطيتان في الدائرة (E)، وتحصران نفس القوس [OB].

لدينا إذن : $O\hat{A}B = O\hat{C}B$

الزاويتان [$O\hat{A}C$] و [$O\hat{B}C$] محيطيتان في الدائرة (E) و تحصران نفس القوس [OC]، فهما متقايستان.

لدينا إذن : $O\hat{A}C = O\hat{B}C$

وحيث أن : $O\hat{A}B = O\hat{A}C$ فإن : $O\hat{C}B = O\hat{B}C$.

ومنه نستنتج أن المثلث OBC متساوي الساقين وأن : $OB = OC$

وهذا يدل على أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (E') .

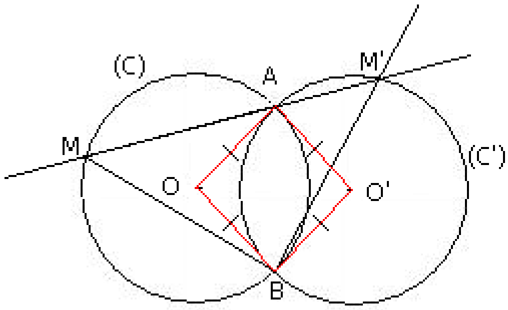
الزاوية [$I\hat{B}C$] محيطية في الدائرة (E') والزاوية المركزية المرتبطة بها هي [$I\hat{O}C$]،

وبالتالي فإن $I\hat{B}C = \frac{1}{2} I\hat{O}C$.

الزاويتان [$I\hat{O}C$] (أو [$A\hat{O}C$]) و [$A\hat{B}C$] محيطيتان في الدائرة (E) وتحصران نفس القوس [AC]، وبالتالي فإن : $I\hat{O}C = A\hat{B}C$. تستنتج إذن أن : $I\hat{B}C = \frac{1}{2} A\hat{B}C$.

أي أن [BI) منصف للزاوية [$A\hat{B}C$] وحيث أن [AI) منصف للزاوية [$C\hat{A}B$]. فإن I هي نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث ABC.

5)



أ)لدينا $OA=OB=O'A=O'B$ لأن للدائرتين (ξ) و (ξ') نفس الشعاع r و $A\in(\xi)$ و $B\in(\xi)$ و $A\in(\xi')$ و $B\in(\xi')$

إذن AOBO' معين

ب) الزاوية $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}B]$ في الدائرة (ξ)

إذن $A\hat{M}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B$ (1)

الزاوية $[A\hat{O}'B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}'B]$ في الدائرة (ξ')

إذن $A\hat{M}'B=\frac{1}{2}A\hat{O}'B$ (2)

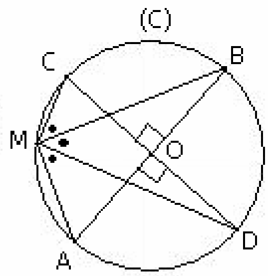
و بما أن AOBO' معين فإن $A\hat{O}B=A\hat{O}'B$ لأن الزاويتين $[A\hat{O}B]$ و $[A\hat{O}'B]$ متقابلتان في المعين AOBO'

و منه $\frac{1}{2}A\hat{O}B=\frac{1}{2}A\hat{O}'B$ (3)

ومن (1) و (2) و (3) نستنتج ان $A\hat{M}B=A\hat{M}'B$

و بالتالي المثلث MBM' متساوي الساقين في B

6)



الزاوية $[A\hat{O}D]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}D]$ و

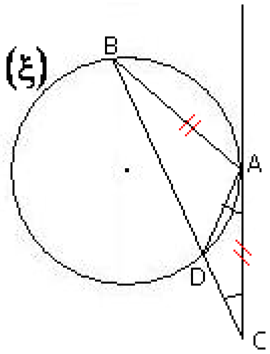
لدينا $A\hat{O}D=90°$ لأن المستقيمين (CD) و (AB) متعامدان في O

و منه $A\hat{M}D=\frac{1}{2}\times 90°$

أي $A\hat{M}D=45°$

الزاوية $[C\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[C\hat{M}B]$ و لدينا $C\hat{O}B=90°$

12)



الزاوية $[C\hat{A}D]$ محيطية في الدائرة (ξ) وتحصر القوس [AD]

و الزاوية $[A\hat{B}D]$ محيطية في الدائرة (ξ) و تحصر نفس القوس [AD]

إذن $A\hat{B}D=C\hat{A}D$ (1)

و لدينا AB=AC

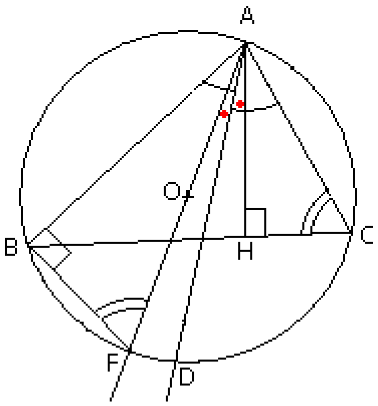
إذن المثلث ABC متساوي الساقين في A

و بالتالي $A\hat{B}D=A\hat{C}D$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن $A\hat{C}D=C\hat{A}D$

و بالتالي ADC مثلث متساوي الساقين في D

13)



نعتبر النقطة F المقابلة قطريا بالنقطة A أي [AF] قطر في (ξ)

المثلث BAF قائم الزاوية في B و بالتالي فإن الزاوية $[O\hat{A}B]$ تتمم الزاوية $[A\hat{F}B]$.

أي $O\hat{A}B+A\hat{F}B=90°$

و كذلك الزاوية $[H\hat{A}C]$ تتمم الزاوية $[A\hat{C}B]$ في المثلث القائم الزاوية AHC

أي $H\hat{A}C+A\hat{C}B=90°$

الزاويتان $[A\hat{F}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AB] فهما إذن زاويتان متقايستان و بالتالي فإن متممتيهما $[O\hat{A}B]$ و $[H\hat{A}C]$ متقايستان أي : $O\hat{A}B=H\hat{A}C$ (1)

و بما أن (AD) منصف للزاوية $[B\hat{A}C]$ فإن $B\hat{A}D=C\hat{A}D$ (2)

و نستنتج من (1) و (2) أن :

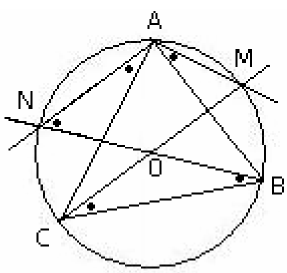
$B\hat{A}D-O\hat{A}B=C\hat{A}D-H\hat{A}C$ (2)-(1)

إذن : $O\hat{A}D=D\hat{A}H$

و بالتالي فإن (AD) منصف كذلك للزاوية $[O\hat{A}H]$.

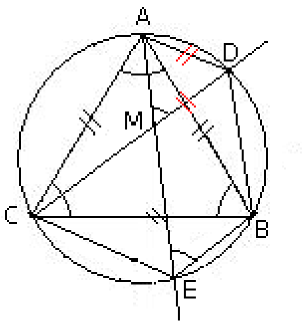
بالزاوية المحيطية $[C\hat{M}B]$ و لدينا $C\hat{O}B=90°$
لأن المستقيمين (OD) و (OC) متعامدان في O
و منه $C\hat{M}B=\frac{1}{2}\times 90°$
أي $C\hat{M}B=45°$
الزاوية $[B\hat{O}D]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة
بالزاوية المحيطية $[B\hat{M}D]$ و لدينا $B\hat{O}D=90°$
لأن المستقيمين (OD) و (OB) متعامدان في O
و منه $B\hat{M}D=\frac{1}{2}\times 90°$
أي $B\hat{M}D=45°$
لدينا $A\hat{M}C=A\hat{M}D+D\hat{M}B+B\hat{M}C$
إذن $A\hat{M}C=45°+45°+45°$
أي $A\hat{M}C=135°$
الزاوية $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة
بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}B]$ و لدينا $A\hat{O}B=180°$
لأن النقط A و O و B مستقيمية و $O\in[AB]$
و منه $A\hat{M}B=\frac{1}{2}\times 180°$
أي $A\hat{M}B=90°$
و بالمثل نبين أن $C\hat{M}D=90°$
ملاحظة: يمكن في الحالتين الأخيرتين استعمال خاصية مثلث أحد أضلاعه هو قطر(أي محاط بنصف دائرة)

(7



الزاويتان $[C\hat{A}N]$ و $[C\hat{B}N]$ محيطيتان في الدائرة (ع) و تحصران نفس القوس [CN]
إذن $C\hat{A}N=C\hat{B}N$ (1)
الزاويتان $[B\hat{A}M]$ و $[B\hat{C}M]$ محيطيتان في الدائرة (ع) و تحصران نفس القوس [BM]
إذن $B\hat{A}M=B\hat{C}M$ (2)
و لدينا المثلث OBC متساوي الساقين في O (لأن OB=OC=r حيث r شعاع الدائرة (ع)
إذن زاويتا قاعدته متقايستان أي :
$C\hat{B}N=B\hat{C}M$ (3)

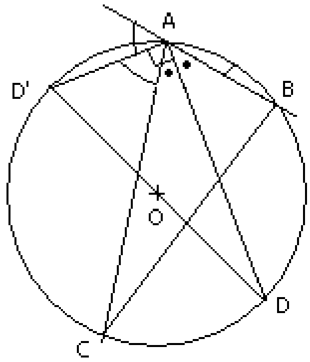
(14



أ) الزاويتان $[A\hat{D}C]$ و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان في الدائرة (ع) وتحصران نفس القوس [AC]
إذن $A\hat{D}C=A\hat{B}C$ (1)
و لدينا المثلث ABC متساوي الأضلاع إذن $A\hat{B}C=60°$ (2)
و من (1) و(2) نستنتج أن $A\hat{D}C=60°$
و لدينا المثلث ADM متساوي الساقين في D لأن AD=DM
و بالتالي نستنتج أنه في المثلث ADM
$M\hat{A}D=D\hat{M}A=A\hat{D}M=60°$
أي أن المثلث DAM متساوي الأضلاع .

ب) لدينا الزاويتان $[M\hat{E}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AB]
إذن $A\hat{C}B=M\hat{E}B$
و لدينا $A\hat{C}B=60°$ لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع
و منه $M\hat{E}B=60°$
و لدينا $A\hat{M}D=60°$ لأن المثلث DAM متساوي الأضلاع
و بالتالي الزاويتان $[A\hat{M}D]$ و $[M\hat{E}B]$ متناظرتان ومتقايستان بالنسبة للمتوازين (EB) و (MD) و القاطع لهما (ME) ، إذن : (EB) // (MD) (1).
و لدينا الزاويتان $[C\hat{D}B]$ و $[B\hat{A}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [BC]
إذن $B\hat{A}C=C\hat{D}B$
و لدينا $B\hat{A}C=60°$
إذن $C\hat{D}B=60°$
و رأينا أن $A\hat{M}D=60°$
إذن الزاويتان $[C\hat{D}B]$ و $[A\hat{M}D]$ متبادلتان داخليا بالنسبة للمستقيمين (ME) و (DB) و قاطعهما (MD) و متقايستان إذن(DB)//(ME) (2)
و من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي DMEB متوازي الأضلاع.

و نستنتج من (1) و (2) و(3) أن : $C\hat{A}N = B\hat{A}M$



8)

أ) الزاوية $[D\hat{O}D']$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[D\hat{A}D']$

و منه : $D\hat{O}D' = 2.D\hat{A}D'$

و لدينا $D\hat{A}D' = 90°$ لأن المنصف الداخلي و الخارجي لنفس الزاوية في مثلث (هنا $[C\hat{A}B]$) يكونان متعامدان

و بالتالي $DOD' = 180°$

إذن النقط D و 'D و O مستقيمية.

ب) لدينا الزاويتان $[D\hat{A}B]$ $[D\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [BD]

إذن $D\hat{C}B = D\hat{A}B$ (1)

و الزاويتان $[D\hat{B}C]$ $[D\hat{A}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [CD]

إذن $D\hat{B}C = D\hat{A}C$ (2)

و لدينا $D\hat{A}B = D\hat{A}C$ (3) (لأن [AD) منصف الزاوية $[B\hat{A}C]$)

و من (1) و (2) و(3) نستنتج أن : $D\hat{B}C = D\hat{C}B$

أي أن المثلث DBC متساوي الساقين في D

و منه DB=DC (4)

و لدينا OB=OC=r (5) لأن B و C ينتميان إلى الدائرة (ع) شعاعها r

و من (4) و (5) نستنتج أن (OD) واسط ل [BC] أي أن (DD') واسط [BC] لأن (OD) و (OD') متعامدان

ج) الزاويتان $[M\hat{E}C]$ و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AC]

إذن $M\hat{E}C = A\hat{B}C$

و لدينا $A\hat{B}C = 60°$

إذن $M\hat{E}C = 60°$ (1)

و لدينا الزاويتان $[A\hat{M}D]$ و $[C\hat{M}E]$ متقابلتان بالرأس M و $A\hat{M}D = 60°$

إذن $C\hat{M}E = 60°$ (2)

و من (1) و(2) نستنتج أن المثلث MEC متساوي الأضلاع (بين أن $M\hat{C}E = 60°$)

لدينا DMEB متوازي أضلاع و منه DB=ME (3) و ME=MC (4) (لأن المثلث MEC متساوي الأضلاع)

و من (3) و (4) نستنتج أن DB=MC

د) لدينا $M \in [DC]$ و منه DC=DM+MC

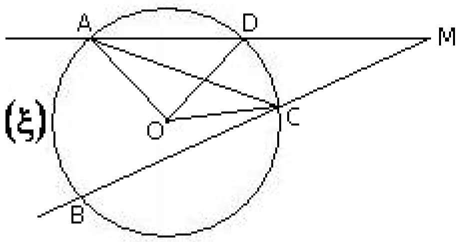
و لدينا DM=DA (لأن المثلث ADM متساوي الأضلاع)

و MC=DB (حسب ج)

و بالتالي DC=DA+DB

15)

(ع)



لدينا $\hat{C}M = 180°$ (1) (مجموع زوايا المثلث AMC)

و $A\hat{C}M + A\hat{C}B = 180°$ (2) لأن الزاويتين $[A\hat{C}B]$ و $[A\hat{C}M]$ متحاديتان ومتكاملتان.

و من (1) و(2) نستنتج أن $A\hat{C}B = A\hat{M}B + M\hat{A}C$ (يمكن استعمال خاصية الزاوية الخارجية في مثلث في هذه النتيجة)

أي $A\hat{M}B = A\hat{C}B - M\hat{A}C$ (3)

و لدينا $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{C}B]$

و منه $A\hat{C}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$ (4)

و كذلك $[C\hat{O}D]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[M\hat{A}C]$

و منه $\widehat{MAC} = \frac{1}{2}\widehat{COD}$ (5) و من (3) و(4) و (5) نستنتج أن $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} - \frac{1}{2}\widehat{COD}$ أي $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AOB} - \widehat{COD}\right)$.	