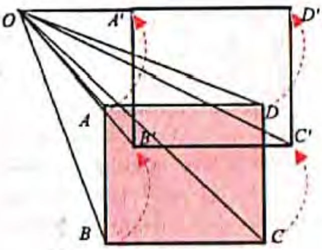
الدَّرسُ الـ 12

الدَّوَرانُ - الزَّوَايَا - المضَلعَاتُ المنتَظمَةُ

1 - الدوران

1-1 مفهوم الدوران



بتدوير حول النقطة O بالزاوية قيسها α الشكل (F) نتحصل على الشكل (F')

نقول ان الشكل (F') صورته الشكل (F) بالدوران الذي مركزه النقطة O و الزاوية قيسها α في اتجاه السهم

$OA = OA'$ ، $OB = OB'$

$A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = \alpha$

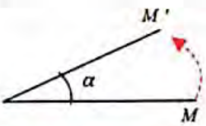
1-2 العناصر الأساسية للدوران

إن الدوران له ثلاثة عناصر اساسية هي

المركز و الزاوية والاتجاه

اما فيما يخص الاتجاه، فناخذ عامة الاتجاه الموجب كاتجاه للدوران(الاتجاه الموجب هو الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة والاتجاه السالب هو الاتجاه الموافق لحركة عقارب الساعة

1-3 صورة نقطة بدوران



بالدوران الذي مركزه النقطة O و الزاوية α و الاتجاه الموجب

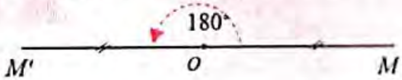
- صورة نقطة M مختلفة عن O هي النقطة M' حيث

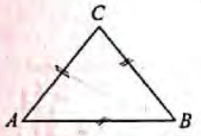
$M\hat{O}M' = \alpha$ و $OM = OM'$

- صورة النقطة O هي النقطة O

ملاحظة

الدوران الذي مركزه النقطة O و الزاوية $180°$ هو تناظر مركزي مركزه النقطة O

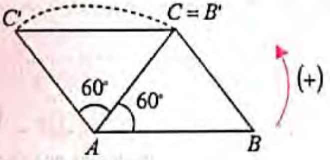




مثال ❶

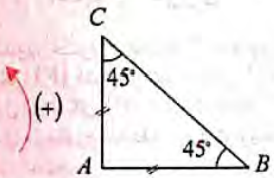
ABC مثلث متقايس الأضلاع

أوجد صورة النقطتين B و C بالدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $60°$ في الاتجاه الموجب .



الحل

- صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $60°$ في الاتجاه الموجب هي النقطة B' حيث $AB = AB'$ و $B\hat{A}B' = 60°$ إذن B' منطبقة على C
- صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه A و زاويته $60°$ في الاتجاه الموجب هي النقطة C' حيث $AC = AC'$ و $C\hat{A}C' = 60°$

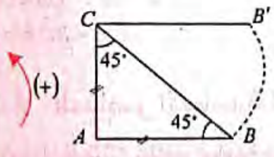


مثال ❷

ABC مثلث قائم في A و متقايس الساقين

ا) أوجد صورة B بالدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $90°$ في الاتجاه الموجب

ب) أوجد صورة B بالدوران الذي مركزه النقطة C و زاويته $45°$ في الاتجاه الموجب.



الحل

ا) صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $90°$ في الاتجاه الموجب هي النقطة C

$AB = AC$ و $B\hat{A}C = 90°$

ب) صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه النقطة C و زاويته $45°$ في الاتجاه الموجب هي النقطة B' $CB = CB'$ و $B\hat{C}B' = 45°$

❷ ـ خواص الدوران و صورة بعض الأشكال

الدوران يحافظ على المسافة و الاستقامة وقيس الزاوية و المساحة و طبيعة الشكل.

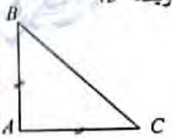
تمرين تدريبي

ABC مثلث قائم في A و متقايس الساقين I منتصف القطعة $[AC]$ و $AC=3cm$

1) أوجد صورة النقط A ، I ، C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $45°$ و لتكن A' ، I' ، C' على الترتيب ثم أحسب الطول BI'

2) أوجد مساحة المثلث $A'BC'$

3) أوجد قيس الزاوية $A'\hat{B}C'$



الحل

1) بما أن I' صورة I بالدوران الذي مركزه B و الزاوية $45°$ فإن $BI=BI'$ (الدوران يحفظ الأطوال)

المثلث BAI قائم في A حسب نظرية فيثاغورث

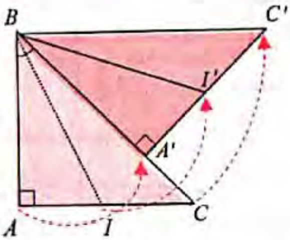
$AB^2+AI^2=BI^2$ لكن $AI=\frac{1}{2}AC$ إذن $BI^2=AB^2+(\frac{1}{2}AC)^2$

$$=AB^2+\frac{1}{4}AC^2$$

$$=AC^2+\frac{1}{4}AC^2$$

$$=\frac{5}{4}AC^2=\frac{\sqrt{5}}{2}.3cm \quad \text{إذن} \quad BI=\frac{\sqrt{5}}{2}AC$$

و بالتالي $BI'=\frac{\sqrt{5}}{2}.3cm$



2) بما أن A' و C' صورتا A و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه B و الزاوية $45°$ و المثلث ABC قائم في A فإن المثلث $A'BC'$ قائم في A' و عليه مساحة المثلث $A'BC'$ تساوي مساحة المثلث ABC

مساحة المثلث ABC هي $\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\times 3}{2}cm^2=\frac{9}{2}cm^2$

إذن مساحة المثلث $A'BC'$ تساوي $\frac{9}{2}cm^2$ (الدوران يحفظ المسافات)

3) بما أن A' و C' صورتا A و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه B و الزاوية $45°$

في الاتجاه الموجب فإن $A\hat{B}C=A'\hat{B}C'$

و بما أن $A\hat{B}C=45°$ فإن $A'\hat{B}C'=45°$ (الدوران يحفظ أقياس الزوايا)

2-2 صورة بعض الأشكال بالدوران

- صورة مستقيم (d) هو مستقيم (d')
- صورة قطعة مستقيمة هي قطعة مستقيمة لهما نفس القيس
- صورة نصف مستقيم هي نصف مستقيم
- صورة دائرة مركزها I هي دائرة لها نفس القطر و مركزها I' صورة I

4 - 2 خواص

- توجد دائرة واحدة تشمل كل رؤوس المضلع

نقول عن هذه الدائرة أنها دائرة محيطة بالمضلع المنتظم و مركزها هو مركز المضلع المنتظم .

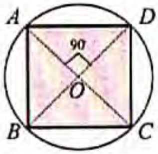
- الزوايا المركزية في المضلع المنتظم متقايسة
- A و B النقطتان متتاليتان من المضلع المنتظم مركزه O

الدوران الذي مركزه النقطة O و زاويته $A\hat{O}B$ في اي اتجاه يحول المضلع المنتظم إلى نفسه (يبقى المضلع المنتظم ثابت بهذا الدوران)

مثال

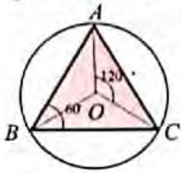
إليك أشكال المضلعات المنتظمة ذات 3 ، 4 ، 6 اضلاع

المربع



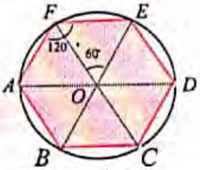
$A\hat{O}B = B\hat{O}C = \frac{360}{4} = 90°$

مثلث متقايس الأضلاع



$A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}A = \frac{360}{3} = 120°$

سداسي منتظم



$A\hat{O}B = B\hat{O}C = \frac{360}{6} = 60°$

تمرين تدريبي 1

أنشئ الثماني المنتظم الذي مركزه النقطة O و ضلعه $[AB]$ حيث $AB = 2cm$

الحل

نرسم قطعة مستقيمة $[AB]$ بحيث $AB = 2cm$

ثم نرسم محور القطعة $[AB]$ و نصف المستقيم $[Ax)$

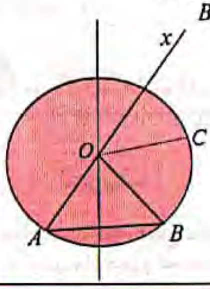
بحيث $x\hat{A}B = 67{,}5°$

نرمز بـ O إلى نقطة تقاطع $[Ax)$ و محور القطعة $[AB]$

- نرسم الدائرة ذات المركز النقطة O و تشمل النقطتين A و B
- ثم بفتحة مقدرها $A.B$ و بوضع إبرة الفرجار في النقطة B

نرسم قوسا يقطع الدائرة في النقطة C المختلفة عن O

بنفس الكيفية تتم تعليم النقاط الأخرى



-كيفية حساب $x\hat{A}B$

المثلث OAB متقايس الساقين

إذن $O\hat{A}B = \frac{1}{2}\left(180° - A\hat{O}B\right)$

الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية في الثماني المنتظم و عليه

$$A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$$

إذن $O\hat{A}B=\frac{1}{2}(180^\circ-45^\circ)=\frac{1}{2}\times 135^\circ=67.5^\circ$

و بالتالي $x\hat{A}B=O\hat{A}B=67.5^\circ$

تمرين تدريبي 2

$ABCDEFGH$ ثماني منتظم محيط بالدائرة ذات المركز النقطة O وطول نصف القطر $3cm$ ، I منتصف القطعة $[AB]$

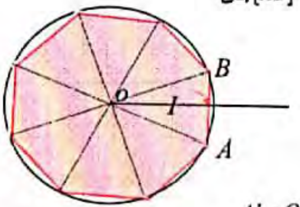
- احسب الطول AB مدور إلى $0,01$

الحل

لدينا

$$A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$$

- المثلث OAB متقايس الساقين و I منتصف $[AB]$ إذن (OI) هو المنصف للزاوية $A\hat{O}B$



و عليه $A\hat{O}I=\frac{1}{2}A\hat{O}B$

$=\frac{1}{2}\times 45^\circ=22,5^\circ$

المثلث OIA قائم في I

إذن $\sin 22,5^\circ=\frac{AI}{OA}$ و منه نجد $AI=OA\sin 22,5^\circ$

و بالتالي $AB=2AI=2\times OA\sin 22,5^\circ$

$\approx 2\times 3\times 0,38268343$

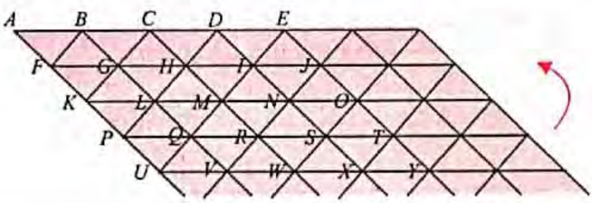
$\approx 2,296$

و القيمة المدورة إلى $0,01$ هي $2,30cm$

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1

الشكل التالي مركب من مثلثات متقايسة الأضلاع
نعتبر الدوران الذي مركزه النقطة M و الزاوية $60°$ في اتجاه عقارب الساعة
1) اوجد صور النقط E,O,N بهذا الدوران
2) ما هي صورة الزاوية $N\hat{O}E$ بهذا الدوران؟
3) ماذا يمكن القول عن الزاوية $N\hat{O}E$ و صورتها؟



الحل

1) بما أن المثلث MNR متقايس الأضلاع فإن صورة النقطة N بهذا الدوران هي النقطة R
- بما أن المثلث MOX متقايس الأضلاع فإن صورة النقطة O بهذا الدوران هي النقطة X
الزاوية $E\hat{M}O=\frac{1}{2}H\hat{M}N=\frac{1}{2}\times 60°=30°$
و الزاوية $O\hat{M}T=\frac{1}{2}M\hat{N}R=\frac{1}{2}\times 60°=30°$ إذن الزاوية $E\hat{M}T=60°$
و لدينا $ME=MT$ إذن صورة النقطة E بهذا الدوران هي النقطة T
2) بما أن صور النقط E,O,N هي T,X,R فإن صورة الزاوية $N\hat{O}E$ هي الزاوية $R\hat{X}T$
- الزاويتان $N\hat{O}E$ و $R\hat{X}T$ لهما نفس القيس $90°$
لأن $N\hat{O}E=N\hat{O}I+I\hat{O}E=60°+30°=90°$

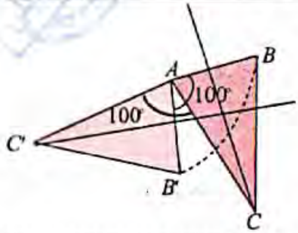
تطبيق 2

ABC مثلث ، و ليكن الدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $100°$ باتجاه عقارب الساعة

1) ارسم المثلث ABC ثم أنشئ النقطتين C' و B' صورتي C و B بهذا الدوران على الترتيب.

2) أنشئ صورة المنصف الزاوية $A\hat{B}C$ بهذا الدوران ، اشرح طريقة الإنشاء

الحل



1) ننشئ النقطة B' صورة B بالكيفية التالية

$B\hat{A}M = 100°$ في الاتجاه السالب و $AB' = AB$

- بنفس الكيفية السابقة ننشئ النقطة C' صورة C

2) صورة المنصف الزاوية $A\hat{B}C$ هو المنصف الزاوية

$A\hat{C}B'$ لأن الدوران يحفظ الزوايا

تطبيق 3

النقط N, M, C, B, A تنتمي إلى دائرة مركزها النقطة O

1) أحسب قيس الزاوية $A\hat{M}B$

2) احسب قيس كل زاوية في المثلث BOC

3) استنتج قيس كل من الزاويتين $A\hat{O}C$ و $A\hat{M}C$

الحل

1) الزاوية $A\hat{M}B$ محيطية و الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية يحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدائرة

لأن $A\hat{M}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = 42{,}5°$

2) الزاوية $B\hat{O}C$ و الزاوية $B\hat{N}C$ الأولى مركزية

و الثانية محيطية تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{BC}$

إذن $B\hat{O}C = 2 \times B\hat{N}C = 2 \times 20° = 40°$

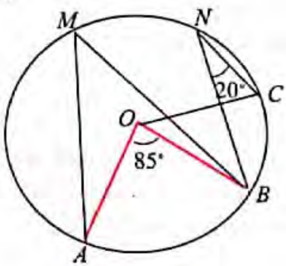
المثلث BOC متقايس الساقين و بالتالي $O\hat{B}C = B\hat{C}O$

و بما أن $O\hat{B}C + B\hat{C}O + B\hat{O}C = 180°$

فإن $O\hat{B}C + O\hat{B}C + 40° = 180°$

إذن $2 \times O\hat{B}C = 180° - 40°$

$O\hat{B}C = \frac{140°}{2} = 70°$



3) لدينا $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C = 85° + 40° = 125°$

ولدينا $A\hat{M}C = A\hat{M}B + B\hat{M}C$

لكن $B\hat{M}C = \frac{1}{2}B\hat{O}C = 20°$

إذن $A\hat{M}C = 42{,}5° + 20° = 62{,}5°$

تطبيق 4

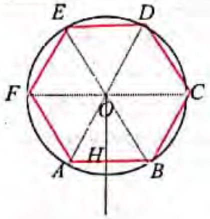
$ABCDEF$ سداسي منتظم مركزه النقطة O و طول ضلعه $4cm$

1) احسب قيس زوايا المثلث OAB

2) ما هو طول نصف قطر الدائرة ذات المركز O و المار بالنقطة A ؟ برر اجابتك

3) أنشئ هذا السداسي المنتظم

الحل



1) الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية $A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$

المثلث AOB متقايس الساقين لأن $OA=OB$

و بالتالي $O\hat{A}B=A\hat{B}O=60^\circ$

2) طول نصف قطر الدائرة التي مركزها O و المار بالنقطة A هو OA

لتكن H منتصف القطعة $[AB]$ عندئذ يكون المستقيم (OH) هو محور القطعة $[AB]$

إذن المثلث AOH قائم في H . و قيس الزاوية $A\hat{O}H=30^\circ$

لدينا $\sin 30^\circ=\frac{AH}{OH}$ و منه $OA=\frac{AH}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\times AB}{\sin 30^\circ}$ اي $OA=\frac{\frac{1}{2}\times 4}{\frac{1}{2}}=4cm$

• **طريقة أخرى**

بما أن كل زوايا المثلث OAB متقايسة فإن OAB مثلث متقايس الأضلاع و عليه

$OA=AB=4cm$

- نتبع نفس خطوات التمرين التدريبي 1 الموجودة في الفقرة 4 .

تطبيق 5

$ABCDEF$ سداسي منتظم مركزه النقطة O و طول ضلعه $4cm$

1) أ) برهن أن المثلث AOB متقايس الأضلاع

ب) ما طبيعة الرباعي $AOCB$

ج) أحسب الطول AC

2) أ) احسب قيس الزاوية $C\hat{A}E$

ب) استنتج أن المثلث CAE متقايس الأضلاع

الحل

1) أ) الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية $A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$

بما أن $OA=OB$ فإن $O\hat{A}B=A\hat{B}O=60^\circ$

إذن المثلث AOB متقايس الأضلاع

ب) بما ان AOB متقايس الأضلاع فإن (AC) منصف للزاوية
$O\hat{A}B$ و بالتالي $C\hat{A}B=30°$
لدينا $A\hat{H}B+C\hat{A}B+O\hat{B}A=180°$
و بالتالي $A\hat{H}B=180°-30°-60°=90°$
إذن الرباعي $AOCB$ فيه القطران متعامدان و الأضلاع كلها
متقايسة و عليه $AOCB$ معين
ج) حساب الطول AC .
لدينا H منتصف القطعتين $[AC]$ و $[OB]$ و بالتالي $AC=2AH$
$\cos 30°=\frac{AH}{AB}$ و منه $AH=AB\cos 30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}cm$
إذن $AC=4\sqrt{3}cm$ $AC=2AH=2\times 2\sqrt{3}cm$

2) أ) $C\hat{A}E=\frac{1}{2}C\hat{O}E$

$C\hat{O}E=2C\hat{O}D=2\times 60°=120°$ إذن $C\hat{A}E=\frac{1}{2}\times 120°=60°$

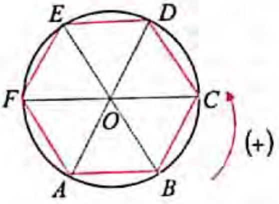
ب) بنفس الكيفية نجد $A\hat{E}C=E\hat{C}A=60°$ إذن المثلث CAE متقايس الأضلاع

تطبيق 6

$ABCDEF$ سداسي منتظم مركزه النقطة O ، عين صورة المثلث BCO

1) بالتناظر ذي المحور (BE)
2) بالتناظر المركزي الذي مركزه النقطة O
3) بالانسحاب الذي شعاعه AF
4) بالدوران الذي مركزه النقطة O و الزاوية $60°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة

الحل



1) تعين صورة المثلث BCO بالتناظر المحوري الذي محوره (BE)
بما أن $(CF)\perp(BE)$ فإن نظيرة C هي F
نظيرة B هي B (لأن B نقطة من المحور)
نظيرة O هي O (لأن O نقطة من المحور)
إذن صورة المثلث BCO هي المثلث BFO

2) تعين صورة المثلث BCO بالتناظر المركزي الذي مركزه النقطة O
نظيرة B هي E
نظيرة O هي O
نظيرة C هي F
إذن صورة المثلث BCO بالتناظر المركزي هو المثلث EFO

3) تعين صورة المثلث BCO بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AF}$
صورة B هي O
صورة النقطة C هي D

صورة النقطة O هي E

إذن صورة المثلث BCO بهذا الانسحاب هو المثلث ODE

4) تعين صورة المثلث BCO بالدوران

صورة النقطة B هي C

صورة النقطة C هي D

صورة النقطة O هي O (لأن O مركز الدوران تبقى ثابتة)

إذن صورة المثلث BCO بهذا الانسحاب هو المثلث CDO

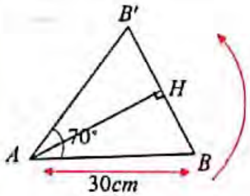
تطبيق 7

مسطرة طولها $30cm$ ندوها حول أحد أطرافها بزاوية قدرها $70°$

1) ارسم شكلا لهذه الوضعية مع تمثيل المسطرة بقطعة مستقيمة .

2) ما هي المسافة التي تفصل بين الطرف الثاني عن وضعيته في الحالة الابتدائية تعطى (النتيجة مدورة إلى $0,01$).

الحل



1) الشكل

2) المسافة المطلوبة هي BB'

لدينا $AB = AB'$ و بالتالي المثلث ABB' متقايس الساقين

لتكن H منتصف $[BB']$

إذن $[AH]$ هو محور القطعة $[BB']$ منصف الزاوية $B\hat{A}B'$

و منه $B\hat{A}H = 35°$

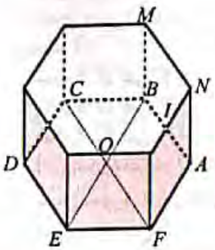
$\sin B\hat{A}H = \dfrac{BH}{AB}$ و منه $BH = AB.\sin B\hat{A}H$ و لدينا $BB' = 2 \times BH$

$= 2 \times 30 \sin 35° \approx 34,414cm$

النتيجة مدورة إلى $0,01$ هي $34,41$

تطبيق 8

علبة على شكل موشور ارتفاعه $4cm$ ، قاعدته سداسي منتظم $ABCDEF$ مركزه النقطة O مع $OA = 5cm$



1) احسب المسافة الجانبية لهذا الموشور

2) احسب القيمة المضبوطة للارتفاع OI في المثلث OAB

3) احسب المساحة بالسنتيمتر مربع للمثلث OAB

ثم استنتج مساحة قاعدة الوشور

4) عين القيمة المضبوطة لحجم الموشور تدور النتيجة إلى الوحدة

الحل

1) المسافة الجانبية لهذا الموشور هي 6 أضعاف مساحة المستطيل $ABNM$
لحساب مساحة المستطيل $ABNM$ نحسب أولا الطول AB
المثلث OAB متقايس الأضلاع و $[OI]$ الارتفاع المتعلق بالضلع $[AB]$ و هو في نفس الوقت يعبر منصف للزاوية $A\hat{O}B$ إذن $A\hat{O}I = \frac{1}{2}A\hat{O}B = 30°$

لدينا $\sin A\hat{O}I = \frac{AI}{OA}$ و منه $AI = OA.\sin A\hat{O}I$

إذن $AB = 2AI = 2 \times OA \times \sin A\hat{O}I = 2\times 5\times\frac{1}{2} = 5cm$

- طريقة أخرى

المثلث AOB متقايس الأضلاع إذن $AB = OB = OA = 5cm$
- مساحة المستطيل $ABNM$ هي $AB \times AN$ اي $4\times 5\, cm$ و تساوي $20\, cm^2$
و بالتالي المساحة الجانبية للموشور هي $6\times 20 = 120\, cm^2$

2) حساب OI

لدينا $\cos A\hat{O}I = \frac{OI}{OA}$ و منه $OI = OA\times\cos A\hat{O}I = 5\times\cos(30°) = 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}cm$

3) مساحة المثلث OAB هي $\frac{AB\times OI}{2}$

$$\frac{AB\times OI}{2} = \frac{5\times\frac{5}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{4}cm^2$$

- مساحة قاعدة الموشور هي 6 أضعاف مساحة المثلث OAB اي $6\times\frac{25\sqrt{5}}{4}cm^2$ و بالتبسيط نجد
$\frac{75\sqrt{5}}{2}cm^2$

4) حجم الموشور هو $\frac{1}{3}B\times h$ حيث B مساحة القاعدة و h الارتفاع

$$\frac{1}{3}B\times h = \frac{1}{3}\times\frac{75\sqrt{5}}{2}\times 4 = 25\sqrt{5}\times 2cm^2 = 50\sqrt{5}cm^2$$

القيمة المدورة إلى الوحدة هي $112cm^2$