معارف

1 - الدوران - صورة نقطة بدوران

صورة نقطة بدوران

الصورة تبيّن أنه عندما يدور عقرب الثواني بزاوية α باتجاه السهم حول النقطة O، فإن الشكل $\mathcal{F}$ يدور بزاوية α لينطبق على الشكل $\mathcal{F}'$.

نقول إن $\mathcal{F}'$ هو صورة $\mathcal{F}$ بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته °α واتجاهه هو اتجاه السهم (اتجاه عقارب الساعة)

نلاحظ أنه :

B يدور لينطبق على B' بحيث $OB = OB'$ و $\widehat{BOB'} = \alpha$.

C يدور لينطبق على C' بحيث $OC = OC'$ و $\widehat{COC'} = \alpha$.

A يدور لينطبق على A' بحيث $OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$.

إذن يعيّن الدوران بالعناصر الثلاثة : مركز الدوران (و هو نقطة مثبتة) – زاوية الدوران – اتجاه الدوران (في اتجاه عقارب الساعة أو عكس هذا الاتجاه).

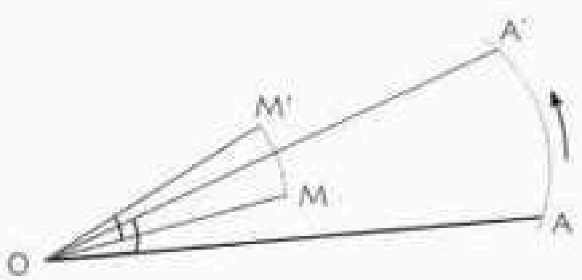
ملاحظة
- يمكن تحديد عناصر دوران بتعين صورة نقطة بهذا الدوران.
- الاتجاه المعاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة يسمى «الاتجاه المباشر».

تعريف

صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه O وزاويته α هي النقطة O نفسها.
صورة نقطة M تختلف عن O بالدوران الذي مركزه O وزاويته °α في اتجاه معين هي النقطة M' بحيث $OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = \alpha°$.

مثال

لاحظ الشكل المقابل.



A' صورة A بدوران.

M' هي صورة M بنفس الدوران.

لدينا $OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = 27°$

هذا الدوران هو الدوران الذي مركزه النقطة O.

زاويته °27 و اتجاهه هو الاتجاه المباشر.

2 - خواص دوران - صور أشكال مألوفة

1-2 خواص

كل دوران يحافظ على الأطوال، الزوايا و الإستقامية.

2-2 صور أشكال مألوفة

صور الأشكال المألوفة بدوران تستنتج بتوظيف خواص هذا الدوران.

- صورة مستقيم هو مستقيم
- صورة نصف مستقيم هو نصف مستقيم.
- صورة قطعة مستقيم هي قطعة مستقيم تقايسها
- صورة دائرة هي دائرة لها نفس نصف القطر.

3 - الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية

1-3 الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية

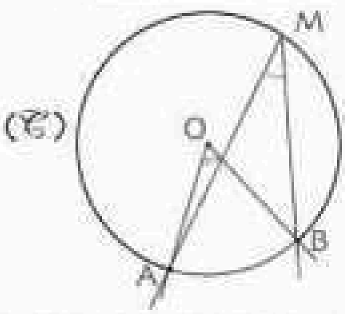
تعريف

(𝒞) هي دائرة مركزها O ، A ،B ،M ثلاث نقط منها.

- تسمى الزاوية $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية.
- تسمى الزاوية $\widehat{AOB}$ الزاوية المركزية المرفقة بالزاوية المحيطية $\widehat{AMB}$.
- نقول عن الزاوية المحيطة $\widehat{AMB}$ و الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ المرفقة بها أنهما تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$.

ملاحظات

- رأس الزاوية المحيطة $\widehat{AMB}$ هو نقطة من الدائرة.
- رأس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ هو مركز الدائرة.
- [MA] و [MB] هما وتران من الدائرة.



2-3 قيس زاوية محيطية و قيس الزاوية المركزية المرفقة بها

نظرية

قيس زاوية محيطية يساوي نصف قيس الزاوية المركزية المرفقة بها.

3-3 الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس

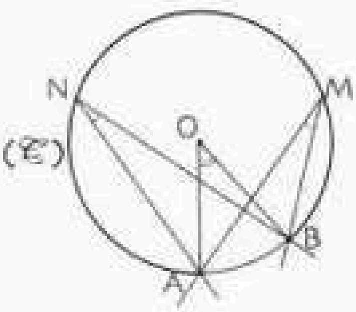
ينتج عن النظرية السابقة النتيجة التالية :

نتيجة

إذا حصرت زاويتان محيطيتان نفس القوس فإن أقياسها متساوية.

- $\widehat{AMB}$ و $\widehat{ANB}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$.
- $\widehat{AOB}$ هي الزاوية المركزية المرفقة بهما

إذن $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.



4 - المضلعات المنتظمة

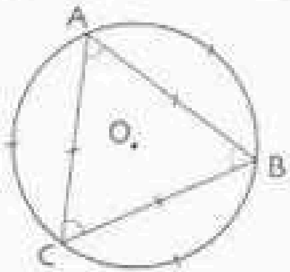
تعريف المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متقايسة و زوياه متقايسة.

خاصية 1 توجد دائرة تشمل رؤوس مضلع منتظم.

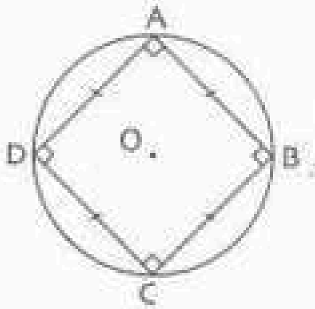
الدائرة التي تشمل رؤوس مضلع منتظم تسمى الدائرة المحيطة به و مركزها هو مركز هذا المضلع المنتظم.

أمثلة مضلعات منتظمة مألوفة

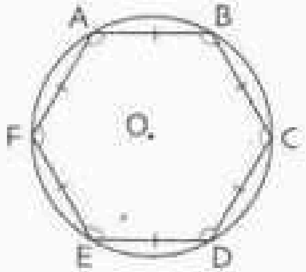
مثلث متقايس الأضلاع



مربع



سداسي منتظم

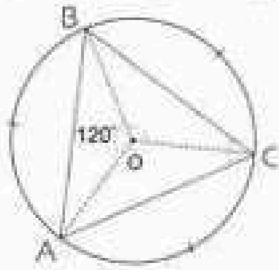


خاصية 2 O مركز مضلع منتظم و N عدد أضلاعه.
إذا كان [AB] أحد أضلاعه فإن قيس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ هو $\frac{360^\circ}{N}$.

نتائج
- [AB] ضلع من مضلع منتظم مركزه O.
كل الزوايا المركزية مثل $\widehat{AOB}$ متقايسة و قيسها $\frac{360^\circ}{N}$.
- صورة هذا المضلع المنتظم بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\widehat{AOB}$ هي المضلع نفسه.

أمثلة في المضلعات المنتظمة التالية لدينا :

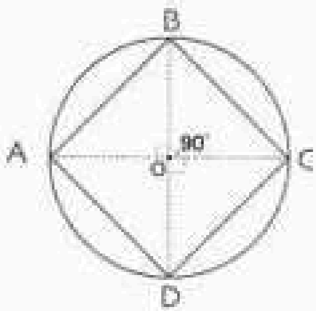
مثلث متقايس الأضلاع



$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$\widehat{ABC} = 60^\circ$

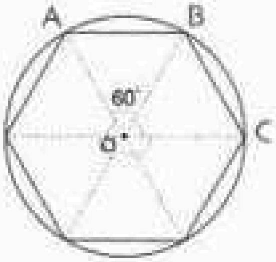
مربع



$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

$\widehat{ABC} = 90^\circ$

سداسي منتظم



$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

$\widehat{ABC} = 120^\circ$

طرائق

1 - إنشاء صور أشكال مألوفة بدوران

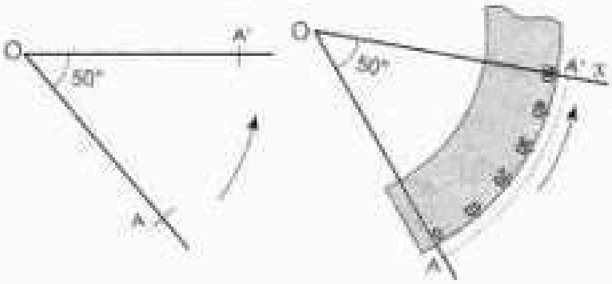
في كل الإنشاءات الواردة في هذه الفقرة، تعتبر الدوران الذي مركزه O، زاويته α، اتجاهه هو اتجاه معين بسهم.

1-1 إنشاء صورة نقطة

طريقة لإنشاء A′ صورة نقطة A، نرسم الزاوية $\widehat{AOX}$ في اتجاه السهم بحيث $\widehat{AOX} = \alpha$ ثم نعين النقطة A′ من نصف المستقيم [OX) بحيث OA′ = OA.

تمرين انشئ صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O و زاوية 50° في الاتجاه المعاكس لاتجاه عقارب الساعة.

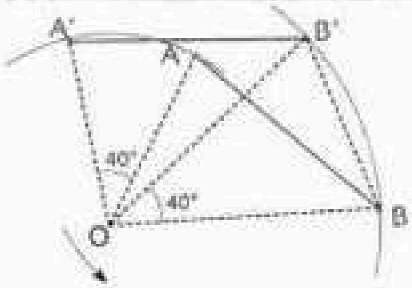
حل
- نرسم نصف مستقيم [OA).
- نستعمل منقلة لرسم زاوية قيسها 50° و في اتجاه السهم، فتعين مبدأ نصف مستقيم [OX) نستعمل المدور لتعيين النقطة A′ على [OX) بحيث OA′ = OA.



1-2 إنشاء صورة قطعة مستقيم

طريقة لإنشاء صورة قطعة مستقيم [AB] بدوران، ننشئ A′ و B′ صورتي A و B على الترتيب.
تكون القطعة [A′B′] هي صورة القطعة [AB] بهذا الدوران.

تمرين انشئ صورة القطعة [AB] بالدوران الذي مركزه O و زاويته 40° و في الاتجاه المعاكس لاتجاه عقارب الساعة (الاتجاه المباشر).



حل نعين النقطتين A′ و B′ بحيث : A′ هي صورة A، B′ هي صورة B.
إذن [A′B′] هي صورة [AB] بهذا الدوران.

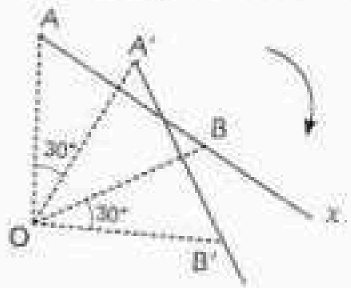
1-3 إنشاء صورة مستقيم

طريقة لإنشاء صورة مستقيم (D) بدوران، نختار نقطتين A و B من المستقيم (D) و ننشئ A′ و B′ صورتي A و B بالدوران. فيكون المستقيم (A′B′) هو صورة المستقيم (D) بهذا الدوران.

1-4 إنشاء صورة نصف مستقيم

طريقة لإنشاء صورة نصف المستقيم [AX) بدوران، نختار نقطة B من [AX) تختلف عن A ثم ننشئ A′ و B′ صورتي A و B على الترتيب. فيكون نصف المستقيم [A′B′) هو صورة نصف المستقيم [AX).

تمرين أنشئ صورة نصف المستقيم [AX) بالدوران الذي مركزه O و زاوية 30° في اتجاه عقارب الساعة.



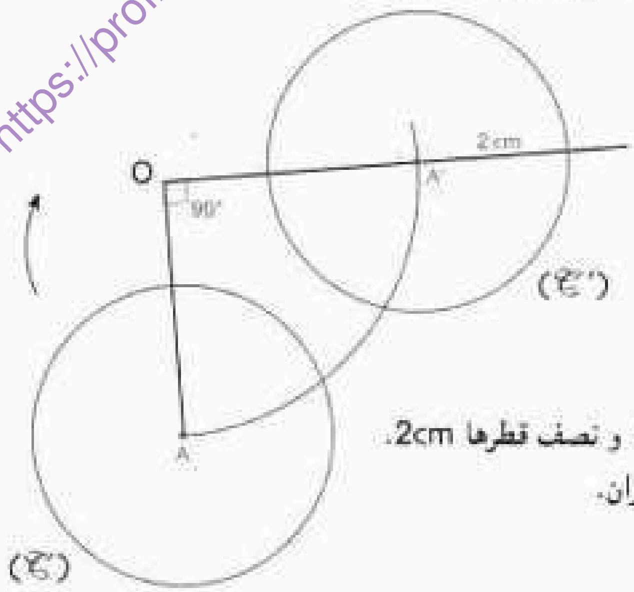
حل B نقطة من [AX) تختلف عن A. $\widehat{AOA'} = 30°$ و OA′ = OA
النقطة B′ تحقق $\widehat{BOB'} = 30°$ و OB′ = OB
نصف المستقيم [A′B′) هو صورة نصف المستقيم [AX) بهذا الدوران.

5-1 إنشاء صورة دائرة

طريقة

لإنشاء صورة دائرة $(\mathscr{C})$ مركزها A و نصف قطرها R بدوران، ننشئ 'A صورة المركز A.
و تكون الدائرة التي مركزها 'A و نصف قطرها R هي صورة الدائرة $(\mathscr{C})$.

تمرين أنشئ صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها A و نصف قطرها 2 cm بالدوران الذي مركزه O و زاويته °90 في اتجاه عقارب الساعة.



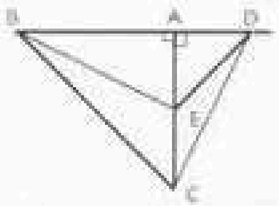
حل مركز $(\mathscr{C}')$ هو صورة مركز $(\mathscr{C})$.
للدائرتين نفس نصف القطر.
ننشئ 'A صورة A ثم ننشئ الدائرة التي مركزها 'A و نصف قطرها 2cm.
نحصل على الدائرة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بهذا الدوران.

2 - توظيف خواص الدوران في براهين

طريقة

يمكن توظيف خواص الدوران في براهين بالبحث عن أشكال قابلة للتطابق. يمكن توظيف خواص الدوران إذا أعطي الدوران أو البحث عن الدوران الذي يحقق التطابق.

تمرين في الشكل المقابل، لدينا AB = AC و AD = AE
و $\widehat{BAC} = \widehat{DAE} = 90°$.
برهن أن BE = CD.



حل • AB = AC و $\widehat{BAC} = 90°$ إذن B هو صورة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته °90 في اتجاه عقارب الساعة.
• AD = AE و $\widehat{DAE} = 90°$ إذن E هو صورة D بنفس الدوران.

$$\begin{array}{|c|}\hline C\\\hline D\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline B\\\hline E\\\hline\end{array}$$

إذن [BE] هي صورة [CD] بالدوران الذي مركزه A و زاويته °90 في إتجاه عقارب الساعة
و بالتالي CD = BE.

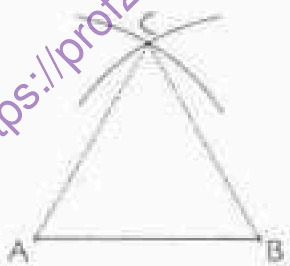
3 - إنشاء مضلع منتظم طول ضلعه معلوم

طريقة

لإنشاء مضلع منتظم طول ضلعه معلوم يمكن اتباع المراحل التالية :
• نحسب قيس زاويته و لتكن α.
• نرسم أحد أضلاعه و ليكن [AB].
• نحول A إلى C بالدوران الذي مركزه B وزاويته α في الإتجاه المناسب.
• نواصل بالدوران الذي مركزه C و بنفس الزاوية و الاتجاه لتحويل B إلى D ....

تمرين 1 إنشي مثلثا متقايس الأضلاع، سداسيا منتظما، مربعا طول ضلع كل من هذه المضلعات 2 cm.

حل إنشاء المثلث المتقايس الأضلاع طول ضلعه 2cm



يعود الانشاء إلى إنشاء مثلث علمت أطوال أضلاعه.

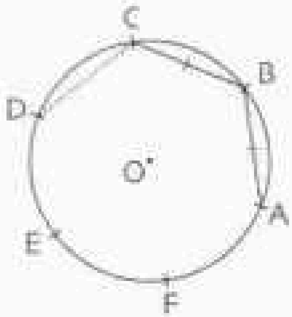
- ننشئ أحد أضلاعه ليكن [AB] بحيث AB = 2 cm.
- نرسم قوسي دائرتين نصف قطريهما 2 cm مركزاهما A و B على الترتيب.

يتقاطع القوسان في النقطة C.

يمكن تطبيق الطريقة بالدوران الذي مركزه A (أو B) و زاويته 60°

للحصول على الرأس C.

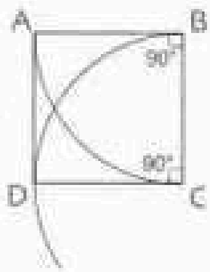
إنشاء سداسي منتظم طول ضلعه 2cm



- ننشئ دائرة نصف قطرها 2 cm.
- نعين على الدائرة نقط تحدد أوتارا متتالية طول كل منها 2 cm

(نستعمل المدور لتعيين طرفي كل منها). يمكن استعمال الدوران الذي زاويته $\widehat{ABC}$ أي 120° و نطبق طريقة إنشاء مضلع منتظم طول ضلعه معلوم.

إنشاء مربع طول ضلعه 2cm

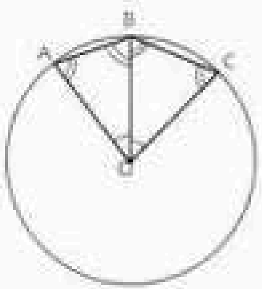


- ننشئ أحد أضلاعه و ليكن [AB].
- نحول A إلى C بالدوران الذي مركزه B و زاويته 90°

و نعين الرؤوس الأخرى بتطبيق الطريقة المذكورة سابقا.

تمرين 2 أنشئ ثمانيا منتظما حيث طول ضلعه 2 cm.

حل نرسم باليد الحرة الشكل. المطلوب الحصول عليه : قيس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$

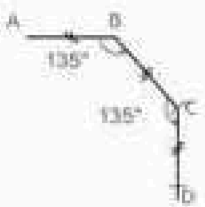


هو $\frac{360°}{8}$ أي 45°.

قيس الزاوية $\widehat{ABC}$ هو (180° - 45°) أي 135°.

(لأن $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABO}$ و $\widehat{ABO} + \widehat{OAB} = 2\widehat{ABO} = 180° - 45°$)

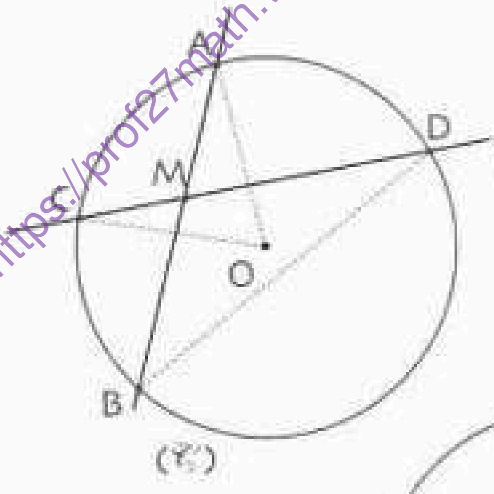
إذن ننشئ الضلع [AB] ثم نحول A إلى C بالدوران الذي مركزه B و زاويته 135° و نواصل باستعمال الدوران الذي مركزه C ....



تمرين محلولة

تمرين 1 ($\mathscr{C}$) دائرة مركزها O. (الشكل)

M نقطة من القرص. (AB) و (CD) مستقيمان يشملان M و يقطعان الدائرة في A و B و في C و D على الترتيب.



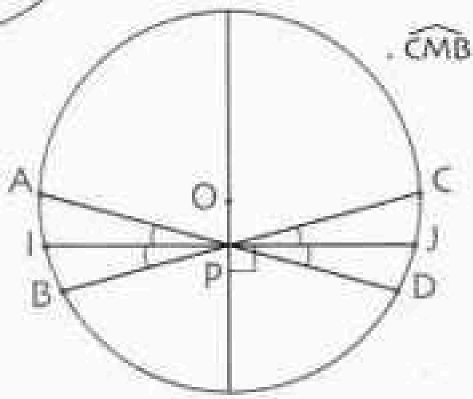
1 . هل $\widehat{AMD}$ زاوية محيطية ؟

2 . برهن أن $\widehat{AMD} = \widehat{CDB} + \widehat{ABD}$.

3 . برهن أن $\widehat{CMB} = \dfrac{\widehat{COB} + \widehat{AOD}}{2}$.

4 . باستعمال الشكل المقابل

برهن أن $\widehat{API} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.



حل 1 . $\widehat{AMD}$ ليست زاوية محيطية لأن رأسها M ليس نقطة من الدائرة حسب المعطيات.

2 . $\widehat{AMD} + \widehat{BMD} = 180° = \widehat{AMB}$ و مجموع زوايا المثلث BMD يساوي 180°.

أي $\widehat{BMD} + \widehat{MBD} + \widehat{MDB} = 180°$

$\widehat{AMD} + \widehat{BMD} = 180°$ و $\widehat{BMD} + \widehat{MBD} + \widehat{MDB} = 180°$ إذن $\widehat{AMD} = \widehat{MBD} + \widehat{MDB}$

أي $\widehat{AMD} = \widehat{CDB} + \widehat{ABD}$ (لأن $\widehat{MBD} = \widehat{CDB}$ و $\widehat{MDB} = \widehat{ABD}$).

3 . $\widehat{AMD}$ زاوية محيطية إذن $\widehat{AMD} = \dfrac{\widehat{COB}}{2}$.

$\widehat{ABD}$ زاوية محيطية إذن $\widehat{ABD} = \dfrac{\widehat{COB}}{2}$ و بالتالي $\widehat{AMD} = \dfrac{\widehat{COB} + \widehat{AOD}}{2}$.

$\widehat{AMD}$ و $\widehat{CMB}$ متقابلتان بالرأس إذن $\widehat{AMD} = \widehat{CMB}$ و بالتالي $\widehat{CMB} = \dfrac{\widehat{COB} + \widehat{AOD}}{2}$

4 . حسب نتيجة السؤال 3 يكون $\widehat{APB} = \dfrac{\widehat{AOB} + \widehat{COD}}{2}$. المستقيم (OP)

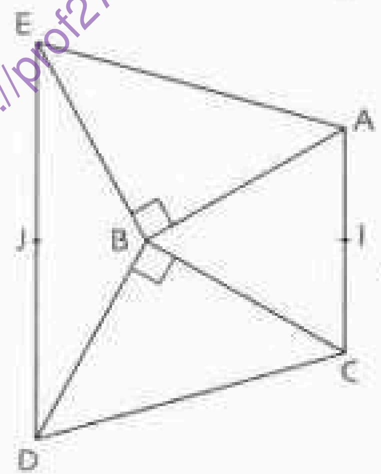
محور تناظر للشكل وبالتالي : $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ و $\dfrac{\widehat{AOB} + \widehat{COD}}{2} = \widehat{AOB}$.

ينتج أن $\widehat{APB} = \widehat{AOB}$ و $\frac{1}{2}\widehat{APB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ و بالتالي $\widehat{AOI} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.

تمرين 2 ABC مثلث متقايس الأضلاع.

CBD و ABE مثلثان قائمان و متساويا الساقين في الوضعية المبينة في الشكل.

I منتصف [AC] و J منتصف [DE].



1 . ما هي صورتا النقطتين A و D بالدوران الذي مركزه B و زاويته °90 و اتجاهه الاتجاه المباشر؟

• استنتج صورة القطعة [AD] بهذا الدوران.

2 . برهن أن CE = AD و أن المستقيمين (EC) و (AD) متعامدان.

3 . برهن أن B هي نقطة من المستقيم (IJ).

حل

1 . المثلث ABE قائم في B و متساوي الساقين إذن BE = BA و $\widehat{ABE} = 90°$. ينتج أن صورة A هي E.

المثلث CBD قائم في B و متساوي الساقين إذن BC = BD و $\widehat{CBD} = 90°$. ينتج أن صورة D هي C.

لدينا : صورة A هي E.

و صورة D هي C.

إذن صورة [AD] هي [EC].

2 . بما أن [EC] هي صورة [AD] فإن AD = EC لأن الدوران يحافظ على الأطوال.

صورة المستقيم (AD) هو المستقيم (EC).

بما أن زاوية الدوران هي °90 فإن المستقيم (AD) و صورته (EC) تكونان زاوية قيسها °90.

إنهما متعامدان.

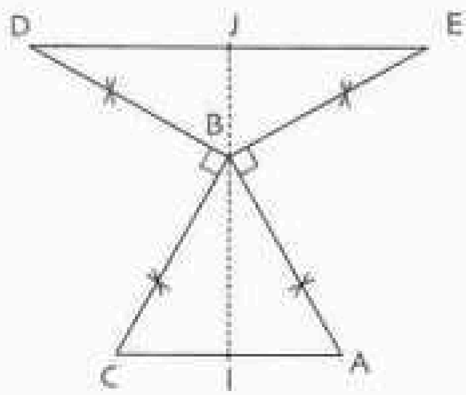
3 . المثلث DBE متساوي الساقين

رأسه الأساسي B إذن $\widehat{DBE} = 2\,\widehat{JBE}$.

$\widehat{DBE} = 360° - (2\times90° + 60°)$

أي $\widehat{DBE} = 120°$

و بالتالي $\widehat{JBE} = 60°$.



$\widehat{JBI} = \widehat{JBE} + \widehat{EBA} + \widehat{ABI}$

$= 60° + 90° + 30°$

$= 180°$

إذن النقاط I ، B ، J على استقامة واحدة. و بالتالي المستقيم (IJ) يشمل B.