https://prof27math.weebly.com/

معارف

1 - الدالة التآلفية

تعريف

a، b عددان معلومان.
عندما نرفق بكل عدد x العدد $ax + b$، نقول أننا عرفنا دالة تآلفية.
a و b هما معاملا هذه الدالة التآلفية.
العدد $ax + b$ هو صورة العدد x بالدالة التآلفية ذات المعاملين a و b.

ملاحظات

1 • يرمز للدالة التآلفية بإحدى الرموز التالية f ، g ، h ....
2 • إذا كان $ax + b$ هو صورة x بالدالة التآلفية f ، نكتب : $f : x \longmapsto ax + b$
و نكتب أيضا : $f(x) = ax + b$

أمثلة

1 • الدالة f حيث $f(x) = 3x + 5$ هي دالة تآلفية معاملاها هما 3 و 5.
• صورة العدد 1 بالدلة f هي $f(1)$ حيث $f(1) = 3\times1 + 5 = 8$
• صورة العدد 0 بالدالة f هي $f(0)$ حيث $f(0) = 3\times0 + 5 = 5$
2 • الدالة g حيث $g(x) = x^2 + x$ ليست دالة تآلفية
(لأن $g(x)$ لا تكتب على الشكل $ax + b$).

حالات خاصة

• إذا كان $b = 0$ فإن $f(x) = ax$. في هذه الحالة الدالة f هي دالة خطية.
• إذا كان $a = 0$ فإن $f(x) = b$. في هذه الحالة الدالة f هي الدالة ثابتة.

2 - الدالة الخطية المرفقة بدالة تآلفية

تعريف

a، b عددان معلومان.
الدالة $x \longmapsto ax$ هي الدالة الخطية المرفقة بالدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$.

مثال

• الدالة $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ هي الدالة الخطية المرفقة بالدالة التآلفية $x \longmapsto \frac{1}{2}x + 3$.
• الدالة $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ هي الدالة الخطية المرفقة أيضا بالدالة التآلفية $x \longmapsto \frac{1}{2}x - 2$.

ملاحظة

يمكن إيجاد دوال تآلفية أخرى بحيث تكون الدالة الخطية $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ مرفقة لهذه الدوال.
لذلك، يكفي تغيير قيمة b.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

3 - التمثيل البياني لدالة تآلفية

خاصية

التمثيل البياني للدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$ هو مستقيم.
معادلة هذا المستقيم هي $y = ax + b$.

ملاحظات

1 • المستقيم (d) الممثل للدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$ يقطع محور تراتيب المعلم في النقطة ذات الإحداثيين $(0 ; b)$. فنقول أن العدد b هو الترتيب إلى المبدأ لهذا المستقيم.

2 • تنتمي نقطة $M(x ; y)$ إلى المستقيم (d) إذا و فقط إذا كان $y = ax + b$.
(أي إحداثيا النقطة M تحقق معادلة المستقيم (d)).

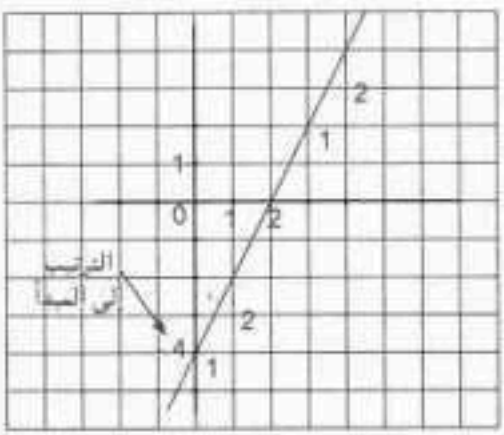
مثال

(d) هو المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 4$.

• معامل توجيه (d) هو 2.

• الترتيب إلى المبدأ هو 4- وهو ترتيب النقطة التي يقطع فيها (d) محور التراتيب.
إحداثيا هذه النقطة هما $(-4 ; 0)$.

• النقطة $A(-1 ; -5)$ ليست نقطة من المستقيم (d) لأن 1- و 5- لا يحققان معادلة المستقيم (d) :
$-5 \neq 2 \times (-1) - 4$



خاصية

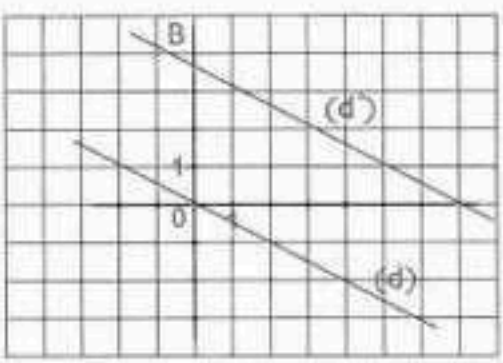
المستقيم الممثل للدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$ يوازي المستقيم الممثل للدالة الخطية المرفقة $x \longmapsto ax$.

ملاحظة

• (d') هو المستقيم الممثل للدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$
و (d) هو المستقيم الممثل للدالة الخطية المرفقة $x \longmapsto ax$.

• لدينا : (d') و (d) متوازيان.

• (d') هو صورة (d) بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$
إحداثياه هما $(0 ; b)$ أي $(0 ; b)$ $\overrightarrow{OB}$.



4 - تناسب التزايدات

خاصية

f هي الدالة التآلفية $x \longmapsto ax + b$
من أجل كل عددين u و v حيث $u \neq v$ لدينا : $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

- $f(v) - f(u)$ يسمى تزايد الصورة.
- $v - u$ يسمى تزايد المتغير.
- تزايد الصورة متناسب مع تزايد المتغير و معامل التناسبية هو a.
- إذا علم عددان و صورتاهما بالدالة التآلفية f فيمكن حساب معامل هذه الدالة.
- عندما يتغير x (يزداد أو ينقص) بمقدار h فإن الصورة $f(x)$ تتغير بالمقدار ah أي $f(x+h) = f(x) + ah$.

مثال 1

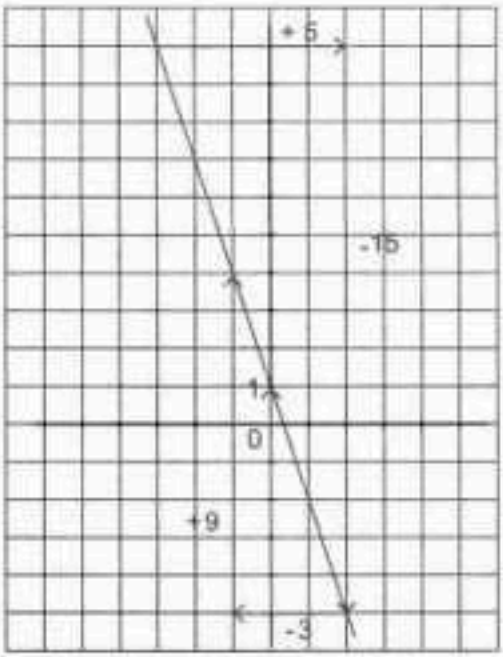
f هي الدالة التآلفية حيث $f(x) = 4x - 1$ لدينا : $f(1) = 3$ و $f(2) = 7$

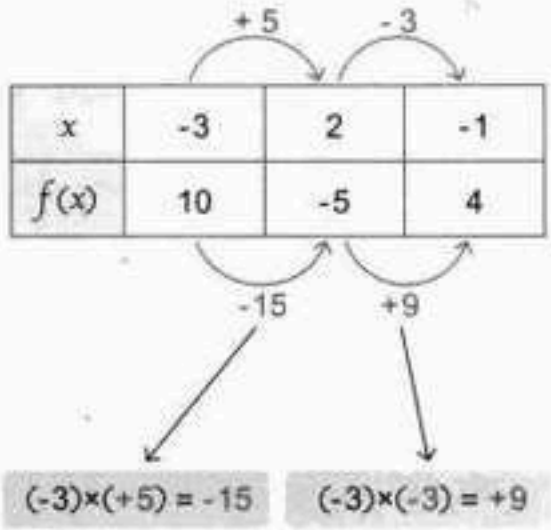
و $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{7 - 3}{1} = 4$

مثال 2

f هي الدالة التآلفية حيث $f(x) = -3x + 1$

الجدول التالي يبين تأثير معامل التناسبية.





تزايد الصورة	-15	-3
تزايد المتغير	+5	+9

$\frac{-15}{+5} = \frac{+9}{-3} = -3$

الجدول المقابل هو جدول تناسبية.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

طرائق

1 - تعيين صورة عدد بدالة تآلفية

طريقة

f دالة تآلفية معرفة بـ : $f(x) = ax + b$ حيث a و b عددان معلومان.
لتعيين صورة العدد r بالدالة التآلفية f نحسب العدد $ar + b$.

تمرين f هي الدالة التآلفية المعرفة بـ : $f(x) = 2x - 5$

- احسب صورة كل من الأعداد -2 ؛ $-\frac{1}{2}$ ؛ $\sqrt{2}$ ؛ 3 بالدالة f

حل

- صورة العدد -2 هي $f(-2)$ حيث $f(-2) = 2(-2) - 5 = -4 - 5 = -9$
أي $f(-2) = -9$ (أي صورة -2 بالدالة التآلفية f هي -9)
- صورة العدد $-\frac{1}{2}$ هي $f(-\frac{1}{2})$ حيث $f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) - 5 = -1 - 5 = -6$
أي $f(-\frac{1}{2}) = -6$.
- صورة العدد $\sqrt{2}$ هي $f(\sqrt{2})$ حيث $f(\sqrt{2}) = 2\times\sqrt{2} - 5$.
- صورة العدد 3 هي $f(3)$ حيث $f(3) = 2(3) - 5 = 6 - 5 = 1$
أي $f(3) = 1$.

2 - تعيين عدد صورته بدالة تآلفية معلومة

طريقة

f دالة تآلفية معرفة بـ : $f : x \longmapsto ax + b$ حيث a و b عددان معلومان.
ليكن k عدد معلوم.
لإيجاد العدد x الذي صورته هي k بالدالة التآلفية f يكفي حل المعادلة $ax + b = k$ ذات المجهول x.

تمرين f دالة تآلفية حيث $f : x \longmapsto 3x - 5$

- عين العدد x الذي صورته بالدلة f هي 2.
- عين العدد x الذي صورته بالدلة f هي -2.
- عين العدد x الذي صورته بالدلة f هي 0.

حل

- تعيين العدد x بحيث $f(x) = 2$.
لدينا : $f(x) = 2$ يعني $3x - 5 = 2$ أي $3x = 7$. و بالتالي $x = \frac{7}{3}$
- تعيين العدد x بحيث $f(x) = -2$.
لدينا : $f(x) = -2$ يعني $3x - 5 = -2$ أي $3x = 3$. و بالتالي $x = 1$
- تعيين العدد x بحيث $f(x) = 0$.
لدينا : $f(x) = 0$ يعني $3x - 5 = 0$ أي $3x = 5$. و بالتالي $x = \frac{5}{3}$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

3 - تعيين دالة تآلفية إنطلاقا من عددين و صورتيهما

طريقة لتعيين الدالة التآلفية f إنطلاقا من عددين x_0 و x_1 و صورتيهما y_0 و y_1 على الترتيب،

يكفي حل الجملة $\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \\ ax_1 + b = y_1 \end{cases}$ ذات المجهولين a و b.

وتكون الدالة التآلفية f معرفة بـ : $f(x) = ax + b$

تمرين • عيّن الدالة التآلفية f حيث $f(-1) = 4$ و $f(3) = -6$.

حل f دالة تآلفية إذن f معرفة كما يلي : $f(x) = ax + b$

لدينا : $f(-1) = a(-1) + b = 4$ و $f(3) = a \times 3 + b = -6$

بالتالي نحصل على الجملة $\begin{cases} -a + b = 4 \quad ① \\ 3a + b = -6 \quad ② \end{cases}$ ذات المجهولين a و b.

نحل هذه الجملة بطريقة التعويض.

من المعادلة ① نستنتج أن $b = a + 4$ و بتعويض b بـ $a + 4$ في المعادلة ②

ينتج أن $3a + a + 4 = -6$

أي $4a = -10$ و بالتالي : $a = -\frac{5}{2}$

لدينا $b = a + 4$ و $a = -\frac{5}{2}$ ، إذن $b = -\frac{5}{2} + 4 = \frac{3}{2}$

و بالتالي $a = -\frac{5}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$.

إذن الدالة التآلفية f حيث $f(-1) = 4$ و $f(3) = -6$

هي الدالة المعرفة بـ : $f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$.

4 - تمثيل دالة تآلفية بيانيا

طريقة f دالة تآلفية حيث $f : x \longmapsto ax + b$.

(d) التمثيل البياني للدالة في المستوي مزود بمعلم.

• لرسم المستقيم (d)، يكفي تعيين نقطتين مختلفتين منه.

تمرين f دالة تآلفية حيث $f : x \longmapsto 2x - 3$.

(d) المستقيم الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مبدأه O.

• أنشئ التمثيل البياني (d) للدالة f.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

حل

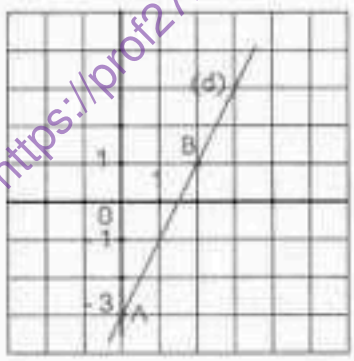
- نعلم أن التمثيل البياني للدالة التآلفية f حيث : $f : x \longmapsto 2x - 3$ هو مستقيم (d) معادلته $y = 2x - 3$.
- إذن لرسم المستقيم (d) يكفي تعيين نقطتين منه.
- نختار قيمتين لـ x و نعين صورتيهما بالدالة f.

لدينا : $f(0) = -3$ إذن النقطة A (0 ; -3) تنتمي إلى (d).

$f(2) = 1$ إذن النقطة B (2 ; 1) تنتمي إلى (d).

- نضع النقطتين A و B في المعلم.
- نرسم المستقيم (AB) أي المستقيم (d).

هذا المستقيم هو التمثيل البياني للدالة f .



5 - قراءة التمثيل البياني لدالة تآلفية

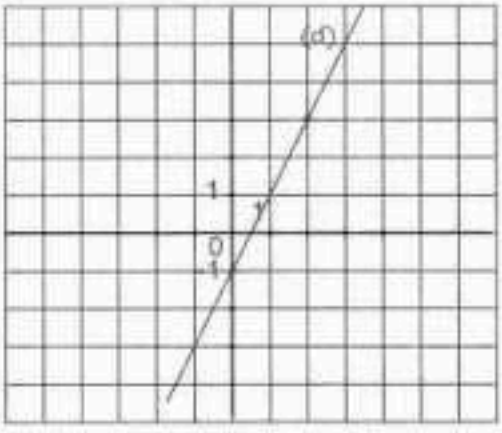
طريقة

f دالة تآلفية و (d) تمثيلها البياني في المستوي المزود معلم.

- لقراءة صورة عدد x بالدالة التآلفية f نعين النقطة من (d) التي فاصلتها x_0 ثم نقرأ ترتيبها على محور التراتيب.
- لقراءة العدد الذي صورته بالدالة التآلفية f هي y_0، نعين النقطة من (d) التي ترتيبها y_0 ثم نقرأ فاصلتها على محور الفواصل.

تمرين f دالة تآلفية، تمثيلها البياني (d). (الشكل)

- إقرأ صورة العدد 3.
- إقرأ العدد الذي صورته 1-.
- إقرأ العدد الذي صورته 3-.



حل

بالقراءة على الشكل نجد :

- صورة العدد 3 هي 5.
- العدد الذي صورته 1- هو 0.
- العدد الذي صورته 3- هو 1-.

6 - تعيين المعاملين a و b إنطلاقا من التمثيل البياني لدالة تآلفية

طريقة

(d) هو التمثيل البياني لدالة تآلفية f.

لتعيين المعاملين a و b يكفي تعيين نقطتين $A(x_A ; y_A)$ و $B(x_B ; y_B)$ من (d)

ثم حل الجملة $\begin{cases} ax_A + b = y_A \\ ax_B + b = y_B \end{cases}$ ذات المجهولين a و b.

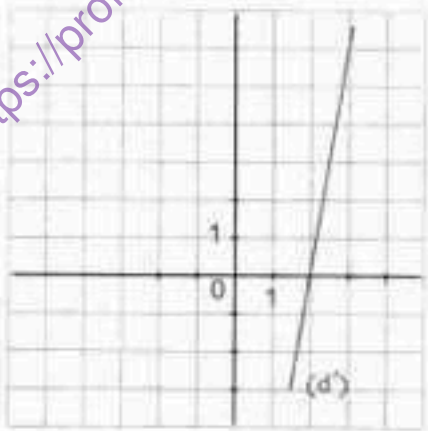
belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

ملاحظة يمكن، في بعض الحالات، قراءة الترتيب إلى المبدإ (أي المعامل b) ثم البحث عن a بحل المعادلة $ax_A + b = y_A$ حيث $(x_A ; y_A)$ احداثيا نقطة أخرى معلومة A من (d).

تمرين 1 (d') هو التمثيل البياني لدالة تآلفية g. (الشكل)

- عيّن المعاملين a و b للدالة g.



حل

لدينا النقطة A (2 ; 0) تنتمي إلى (d')

النقطة B (3 ; 6) تنتمي أيضا إلى (d')

نبحث أولا عن a أي $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 0}{3 - 2} = 6$

نبحث عن b :

لدينا $y_A = 6 \times x_A + b$

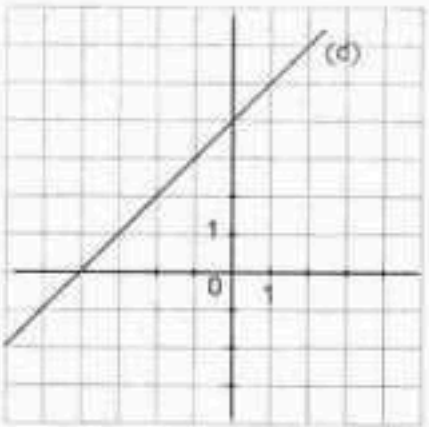
$0 = 6 \times 2 + b$

إذن $0 = 12 + b$ $b = -12$

ينتج أن الدالة g معرفة بـ : $g : x \longmapsto 6x - 12$

تمرين 2 (d) هو التمثيل البياني لدالة تآلفية f. (الشكل)

- عين المعاملين a و b للدالة f.



حل

f معرفة بـ : $f : x \longmapsto ax + b$.

(d) هو المستقيم الممثل للدالة f.

على الشكل، نقرأ $b = 4$ و هو الترتيب إلى المبدأ

(أي ترتيب نقطة تقاطع (d) مع محور التراتيب)

النقطة A (-1 ; 3) تنتمي إلى (d).

إذن $-3 \times a + b = 1$ أي $-3 \times a + 4 = 1$ بالتالي $a = 1$.

ينتج أن الدالة التآلفية f معرفة بـ : $f : x \longmapsto x + 4$.

ملاحظة في التمرين الثاني، تحصلنا على المعامل b و هو الترتيب إلى المبدإ بالقراءة المباشرة على الشكل.

بينما في التمرين الأول هذه القراءة غير ممكنة على الشكل المعطى.

لذلك، طبقنا طريقة حساب المعاملين بحساب أولاً a ، نسبة تزايد الدالة بين عددين مختلفين

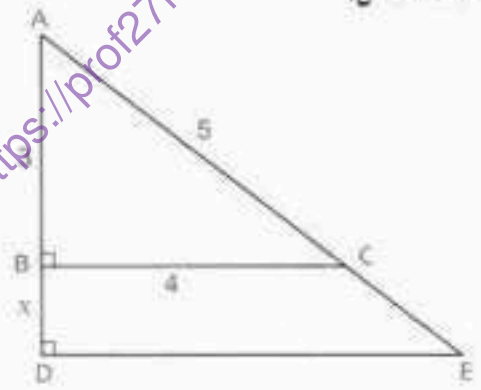
ثم استنتاج المعامل b.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

تمارين محلولة

تمرين 1 المثلثان ABC و ADE قائمان في B و D على الترتيب. (لاحظ الشكل)
الوحدة هي السنتيمتر.



نعلم أن $AB = 3$ ؛ $BC = 4$ ؛ $AC = 5$ و $BD = x$

1 • أ) عبّر عن AD بدلالة x.

ب) عبّر عن DE و AE بدلالة x.

2 • برهن أن المحيط P للمثلث ADE هو دالة تآلفية لـ x.

3 • أ) احسب P من أجل $x = 3,6$.

ب) احسب x من أجل $P = 41,2$.

حل

1 • أ) $AD = x + 3$

ب) المستقيمان (BC) و (DE) يعامدان نفس المستقيم (AD) إذن (BC) يوازي (DE).

بتطبيق نظرية طالس في المثلثين ABC و ADE

نتحصل على التناسب التالي : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

من التناسب $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ينتج أن $\frac{x+3}{3} = \frac{DE}{4}$. إذن $DE = \frac{4}{3}x + 4$

من التناسب $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ ينتج أن $\frac{AE}{5} = \frac{x+3}{3}$. إذن $AE = \frac{5}{3}x + 5$

2 • حساب المحيط P للمثلث ADE.

لدينا : $P = AB + BD + DE + AC + CE$

$= 3 + x + \frac{4}{3}x + 4 + 5 + \frac{5}{3}x + 5$

$= 4x + 17$

إذن $P = 4x + 17$ و بالتالي P هي دالة تآلفية لـ x معرفة بـ : $P : x \longmapsto 4x + 17$

3 • أ) حساب P من أجل $x = 3,6$

لدينا $P = 4x + 17 = 4 \times 3,6 + 17 = 31,4$

إذن من أجل $x = 3,6$ يكون $P = 31,4\,cm$

ب) حساب x من أجل $P = 41,2$

لذلك : نحل المعادلة $4x + 17 = 41,2$ أي $4x = 24,2$ و بالتالي $x = 6,05\,cm$

إذن من أجل $P = 41,2\,cm$ يكون $x = 6,05\,cm$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

تمرين 2 f و g دالتان معرفتان كما يلي :

$f(x) = 2,25x + 3$ و $g(x) = 3x + 2,25$

1 • تحقق أن كل من f و g دالة تآلفيتان.

2 • عيّن معاملي كل منهما.

3 • ما هو العدد x الذي يحقق $f(x) = g(x)$ ؟

4 • ليكن (d_1) التمثيل البياني للدالة f و (d_2) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مبدأه O.

• ماذا يمثل العدد x المحصل عليه في السؤال 3 ؟

• ارسم المستقيمين (d_1) و (d_2).

حل

1 • صورة كل عدد x بالدالتين f و g من الشكل $ax + b$.

إذن الدالتان f و g تآلفيتان.

2 • معاملا f هما 2,25 و 3 و معاملا g هما 3 و 2,25

3 • العدد x الذي يحقق $f(x) = g(x)$ هو حل المعادلة $f(x) = g(x)$.

لدينا $f(x) = g(x)$ يعني $2,25x + 3 = 3x + 2,25$

أي $0,75x - 0,75 = 0$

أي $0,75x = 0,75$

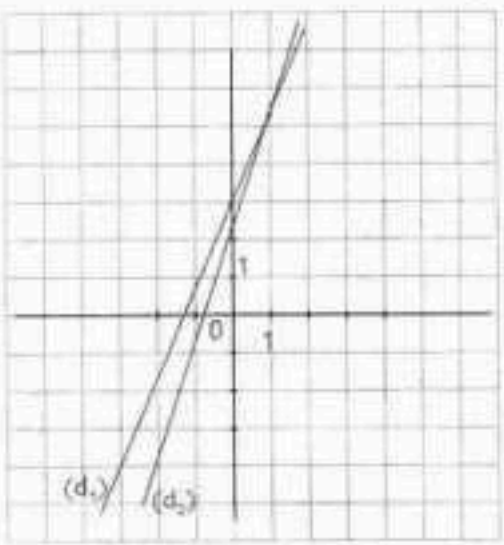
و بالتالي $x = \frac{0,75}{0,75}$. إذن $x = 1$

إذن العدد x الذي يحقق $f(x) = g(x)$ هو العدد 1.

أي $f(1) = g(1)$.

4 • بما أن $f(1) = g(1)$ فإن النقطة $A(1 ; f(1))$ من (d_1) تنطبق على النقطة $B(1 ; g(1))$.

العدد 1 يمثل فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين (d_1) و (d_2).



لدينا $f(1) = 5,25$

$f(0) = 3$

$g(0) = 2,25$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/