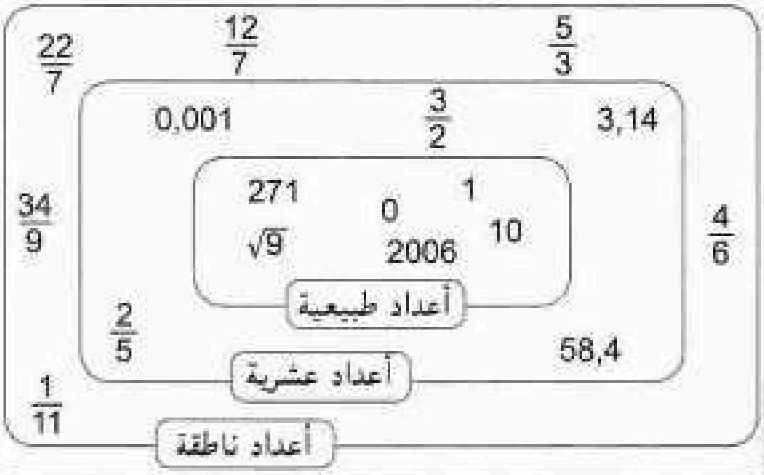
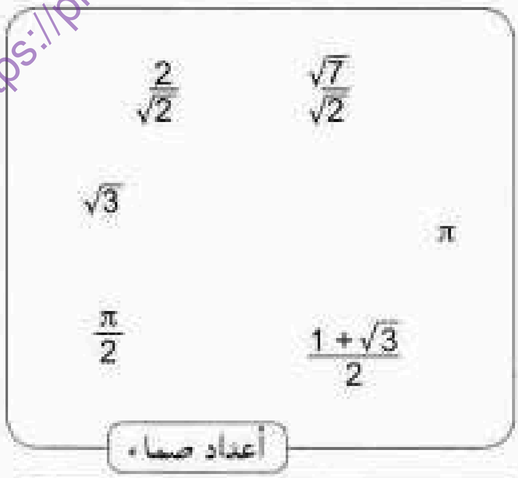
معارف

1 - تقديم مختلف أنواع الأعداد

إليك تقديم لمختلف أنواع الأعداد بواسطة بعض الأمثلة.





الأعداد الناطقة هي الأعداد التي تكتب على شكل كسر بسطه ومقامه عددان صحيحان.

الأعداد الصماء، هي الأعداد غير الناطقة.

تعريف الجذر التربيعي للعدد الموجب a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a.

يرمز للجذر التربيعي للعدد الموجب a بالرمز $\sqrt{a}$ ويقرأ الجذر التربيعي للعدد a.

ينتج من التعريف السابق أن : من أجل كل عدد موجب a ، $(\sqrt{a})^2 = a$

أمثلة
1. $\sqrt{9} = 3$ لأن $3^2 = 9$
2. $\sqrt{0,04} = 0,2$ لأن $(0,2)^2 = 0,04$
3. $\sqrt{10^4} = 10^2$ لأن $(10^2)^2 = 10^4$
4. $\sqrt{0} = 0$ و $\sqrt{1} = 1$

خاصية من أجل كل عدد موجب a ، $\sqrt{a^2} = a$.

البرهان $\sqrt{a^2}$ هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a^2.
و نعلم أن a هو العدد الموجب الذي مربعه a^2. و بالتالي : $\sqrt{a^2} = a$

أمثلة $\sqrt{4^2} = 4$ ؛ $\sqrt{(0,3)^2} = 0,3$

ملاحظة الكتابة $-\sqrt{a}$ تمثل معاكس العدد الموجب $\sqrt{a}$ و بالتالي $-\sqrt{a}$ عدد سالب.

2- العمليات على الجذور التربيعية

خاصية
- من أجل كل عددين موجبين a، b : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- من أجل كل عددين موجبين a، b : $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$
- من أجل كل عددين موجبين a، b حيث $b \neq 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

البرهان • $(\sqrt{ab})^2 = ab$ و $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = a \times b$ و بالتالي : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

• لدينا : $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a \times \sqrt{b}$

• لدينا : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$ و $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$. و بالتالي : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

أمثلة
• $\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$
• $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
• $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
• $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

• $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$
• $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
• $\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$

ملاحظة من أجل كل عدد موجب تماما a ، $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

ملاحظة 1. $\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$ إذن $\sqrt{64+36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36}$

2. $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$ إذن $\sqrt{25-9} \neq \sqrt{25} - \sqrt{9}$

عموما $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ حيث $a > b$

3- حل معادلات من الشكل $x^2 = a$

خاصية a عدد كيفي.
• إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.
• إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلا واحدا هو 0 .
• إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل حلا.

البرهان نفرض أن $a > 0$.
المعادلة $x^2 = a$ تكتب $x^2 - a = 0$
و تكتب أيضا : $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ أو $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$.
إذن $x - \sqrt{a} = 0$ أو $x + \sqrt{a} = 0$ (خاصية الجداء المعدوم)
و بالتالي : $x = \sqrt{a}$ أو $x = -\sqrt{a}$.

• من أجل $a = 0$ ، المعادلة $x^2 = a$ تكتب $x^2 = 0$ أي $x \times x = 0$ إذن $x = 0$.
• نعلم أن مربع كل عدد هو عدد موجب.
إذن : إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل حلا. (لأن x^2 موجب و a سالب تماما).

أمثلة المعادلة $x^2 = 2$ تقبل حلين هما $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$.
المعادلة $x^2 = 16$ تقبل حلين هما 4 و -4 .
المعادلة $x^2 = -8$ لا تقبل حلا.

طرائق

1 - إستعمال تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب لإنجاز حساب

طريقة لإنجاز حسابات تتضمن الجذور التربيعية، نستعمل تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب وخواص العمليات الجبرية.

تمرين 1. انشر $(1+\sqrt{3})^2$.

2. استنتج الجذر التربيعي للعدد $4+2\sqrt{3}$.

حل 1. لدينا: $(1+\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2\times1\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^2$

$= 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$

إذن : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

2. لدينا: $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

إذن : $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$

بما أن $1+\sqrt{3}$ عدد موجب فإن $\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$ إذن $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$

و بالتالي : الجذر التربيعي للعدد $4+2\sqrt{3}$ هو $1+\sqrt{3}$.

2- إستعمال جذور تربيعية في الحساب

طريقة لإنجاز و تبسيط حساب يتضمن جذورا تربيعية، نستعمل تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب و العمليات المعرفة عليها وخواص العمليات الجبرية.

تمرين 1 A عدد معرف كما يلي : $A = x^2 - 5x + 1$

احسب قيمة A من أجل $x = 1+\sqrt{2}$

حل نعوض x بالعدد $1+\sqrt{2}$ في العبارة $x^2 - 5x + 1$

نجد $A = (1+\sqrt{2})^2 - 5(1+\sqrt{2}) + 1$

$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 5 - 5\sqrt{2} + 1$ لأن $2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (2-5)\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$

إذن : $A = -1 - 3\sqrt{2}$

و بالتالي من أجل $x = 1+\sqrt{2}$ لدينا: $A = -1 - 3\sqrt{2}$

تمرين 2 حلل إلى جداء عوامل العدد B حيث $B = 9x^2 - 2$.

حل لدينا : $B = 9x^2 - 2 = (3x)^2 - (\sqrt{2})^2$

$= (3x - \sqrt{2})(3x + \sqrt{2})$

إذن : $B = (3x - \sqrt{2})(3x + \sqrt{2})$

3 - تبسيط كتابة على الشكل $a\sqrt{b}$

طريقة لكتابة $\sqrt{N}$ على الشكل $a\sqrt{b}$ ، نحاول كتابة N على الشكل a^2b حيث a، b عددان موجبان

و يكون : $\sqrt{N} = \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$

تمرين 1. اكتب على الشكل $a\sqrt{b}$ الأعداد التالية : $\sqrt{45}$ ؛ $\sqrt{54}$ ؛ $\sqrt{108}$

2. بسط العبارة $S = \sqrt{72} - \sqrt{32} + 8\sqrt{2}$

حل 1. لدينا :

$$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9}\times\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$
$$\sqrt{54} = \sqrt{9\times6} = \sqrt{9}\times\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$
$$\sqrt{108} = \sqrt{36\times3} = \sqrt{36}\times\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

2. لدينا :

$$S = \sqrt{72} - \sqrt{32} + 8\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{36\times2} - \sqrt{16\times2} + 8\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{6^2\times2} - \sqrt{4^2\times2} + 8\sqrt{2}$$
$$= 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

إذن : $S = 10\sqrt{2}$

4 - كتابة عبارة من الشكل $\frac{a}{\sqrt{b}}$ أو $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق

طريقة
- لكتابة عبارة من الشكل $\frac{a}{\sqrt{b}}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق نضرب كلا من بسطها و مقامها في $\sqrt{b}$
- لكتابة عبارة من الشكل $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ على شكل نسبة مقامها عدد نضرب كلا من بسطها و مقامها في العدد $(\sqrt{b}+\sqrt{c})$.

ملاحظة
- $$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$
- $$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

تمرين أكتب الأعداد التالية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق : $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{2}{\sqrt{7}-3}$.

حل

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = -5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\frac{2(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)} = \frac{2(\sqrt{7}+3)}{7-9} = \frac{2(\sqrt{7}+3)}{-2} = -\sqrt{7}-3$$

تمارين محلولة

تمرين 1 1. x و y عددان حيث $x = 2\sqrt{2} - 1$ و $y = 2\sqrt{2} + 1$

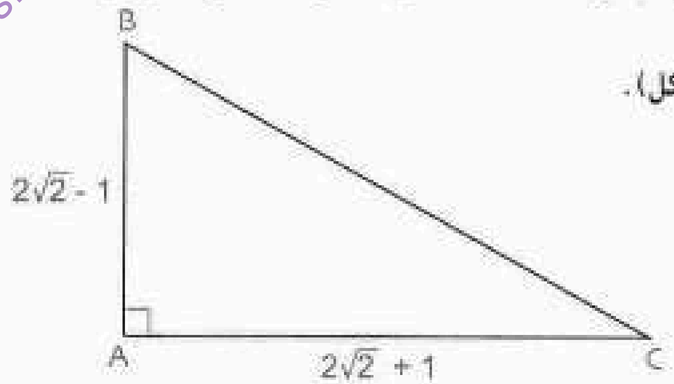
أ) احسب x^2 و y^2 و أعط النتيجتين على الشكل $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b عددان صحيحان.

ب) أثبت أن $x \times y$ هو عدد طبيعي.

2. ABC مثلث قائم في A. (لاحظ الشكل).

أ) احسب القيمة المضبوطة للوتر BC.

ب) احسب مساحة المثلث ABC.



حل

1. أ) حساب x^2 و y^2

$$x^2 = (2\sqrt{2} - 1)^2 = (2\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} + 1$$
$$= 8 - 4\sqrt{2} + 1$$

إذن : $x^2 = 9 - 4\sqrt{2}$

$$y^2 = (2\sqrt{2} + 1)^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2} + 1$$
$$= 8 + 4\sqrt{2} + 1$$

إذن : $y^2 = 9 + 4\sqrt{2}$

ب) حساب $x \times y$

$$x \times y = (2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1) = (2\sqrt{2})^2 - 1 = 8 - 1$$

إذن : $x \times y = 7$ و بالتالي : $x \times y$ عدد طبيعي

2. أ) حساب القيمة المضبوطة للوتر BC

نطبق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم ABC

ونكتب : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ حيث $AB = x$ و $AC = y$

إذن : $BC^2 = x^2 + y^2$

$$= 9 - 4\sqrt{2} + 9 + 4\sqrt{2}$$

و بالتالي : $BC^2 = 18$ إذن : $BC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

ينتج أن القيمة المضبوطة للوتر BC هي $3\sqrt{2}$.

ب) حساب مساحة المثلث ABC

مساحة المثلث ABC هي العدد S حيث $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$

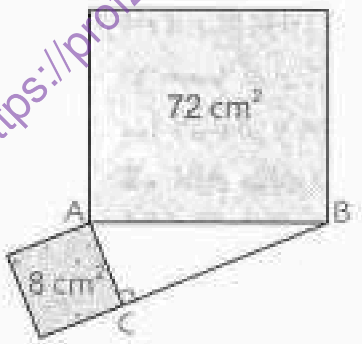
و نعلم أن $AB = x$ و $AC = y$ إذن $S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$ أي $S = \frac{7}{2}$.

تمرين 2 يوجد في الشكل المقابل مثلث قائم، مربع مساحته $8\,cm^2$ و مربع آخر مساحته $72\,cm^2$.

1. احسب القيمتين المضبوطتين لكل من الطولين AC و AB.
اعط النتائج على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.

2. احسب القيمة المضبوطة لكل للطول BC.

3. باستعمال السؤالين 1 و 2، احسب :
أ) القيمة المضبوطة لمساحة المثلث ABC .
اكتب النتيجة على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.
ب) احسب القيمة المضبوطة لمحيط المثلث ABC .
اكتب النتيجة على الشكل $a+b\sqrt{c}$ حيث a، b، c أعداد طبيعية و c أصغر ما يمكن.



حل

1. حساب AC و AB
AC هو ضلع المربع الذي مساحته $8\,cm^2$. إذن $AC^2 = 8cm^2$
و بالتالي : $AC = \sqrt{8}$ أي $AC = 2\sqrt{2}\,cm$
AB هو ضلع المربع الذي مساحته $72\,cm^2$. إذن $AB^2 = 72cm^2$
و بالتالي : $AB = \sqrt{72}$ أي $AB = 6\sqrt{2}\,cm$

2. BC هو ضلع الزاوية القائمة في المثلث ABC . حسب نظرية فيثاغورث، نكتب $AC^2 + BC^2 = AB^2$
أي $8 + BC^2 = 72$.
و بالتالي : $BC^2 = 64$. ينتج أن : $BC = \sqrt{64}$ أي $BC = 8\,cm$

3. أ) حساب مساحة المثلث ABC
لتكن $\mathcal{A}$ مساحة المثلث ABC .

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 8 = 8\sqrt{2}$$

إذن: $\mathcal{A} = 8\sqrt{2}\ cm^2$

أ) حساب محيط المثلث ABC
ليكن $\mathcal{P}$ محيط المثلث ABC .
لدينا : $\mathcal{P} = AB + AC + BC = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 8 = 8 + 8\sqrt{2}$
و بالتالي : $\mathcal{P} = (8 + 8\sqrt{2})cm$