القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

1) قواسم عدد طبيعي:

a , b , $k \neq 0$ أعدادا طبيعية.

عندما يكون $\frac{a}{k}$ عدد طبيعي ، نقول أن k قاسم للعدد a.

نقول أيضا أن : a مضاعف لـ k ، كذلك a يقبل القسمة على k.

2) القواسم المشتركة لعددين طبيعيين:

إذا قبل عددين طبيعيين القسمة على نفس العدد **الطبيعي** غير المعدوم k ، نقول أن k قاسم مشترك للعددين a و b

مثال:

$18 = 3 \times 6$, $15 = 3 \times 5$ ومنه 3 هو قاسم مشترك للعددين 15 و 18.

ملاحظات: 1 قاسم لكل عدد طبيعي.

إذا كان 1 هو القاسم المشترك الوحيد لعددين طبيعيين نقول أن هذين العددين **أوليان فيما بينهما** .

3) خواص القواسم المشتركة:

إذا كان k قاسم مشترك للعددين a , b مع $a \geq b$ فإن k قاسم مشترك لـ $(a-b)$ و $(a+b)$

مثال:

$2\times4=8$, $5\times4=20$ ومنه : **4** قاسم مشترك للعددين 8 و 20.

إذن: $12=8-20$, $28=8+20$ ، 12 و 28 يقبلان القسمة على **4**

أي: **4** قاسم مشترك للعددين 12 و 28.

4) القاسم المشترك الأكبر:

تعريف: أكبر القواسم المشتركة لعددين طبيعيين يسمى القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين ونرمز له بـ: $PGCD$

مثال:

$24=1\times24$ $=2\times12$ $=3\times8$ $=4\times6$ قواسم 24 هي: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$	$15=1\times15$ $=3\times5$ قواسم 15 هي: $1, 3, 5, 15$

نلاحظ أن: 3 ، 1 هما القاسمان المشتركان للعددين 24 و 15.

إذن: 3 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 ، 15

ونكتب : $PGCD(15\ ,\ 24)=3$

ملاحظة: $PGCD(a,b)=PGCD(b,a)$

تعريف:

نقول عن عددين طبيعيين غير معدومين a , b أنهما أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا كان $PGCD(a,b)=1$

مثال:

$12=1\times12$ $=2\times6$ $=3\times4$ قواسم 12 هي : 12 ، 6 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1	$35=1\times35$ $35=5\times7$ قواسم 35 هي: 35 , 7 , 5 , 1

نلاحظ أن 1 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين: 35 ، 12 ونكتب:
$PGCD(12\,,35)=1$

خواص:

1) إذا كان a قاسم لـ b فإن : $PGCD(a\,,b\,)=a$

2) $PGCD(a\,,b\,)=PGCD(a-b\,,b\,)$ ، حيث $a>b$

الكسر غير القابل للاختزال:

نقول عن كسر أنه غير قابل للاختزال إذا كان بسطه ومقامه أوليان فيما بينهما.

مثال:

3 ، 4 أوليان فيما بينهما إذن الكسر $\frac{3}{4}$ هو كسر غير قابل للاختزال .

خاصية:

إذا قسمنا حدي كسر على القاسم المشترك الأكبر لهما نحصل على كسر غير قابل للاختزال.

مثال:

$$\frac{15}{24} \underset{:3}{\overset{:3}{=}} \frac{5}{8}$$

$15=3\times5$

$24=3\times8$ $\qquad PGCD(15;24)=3$

$$\frac{15}{24}=\frac{15\div3}{24\div3}=\frac{5}{8}$$

$\frac{5}{8}$ هو كسر غير قابل للاختزال.

خاصية (1):

إذا كان r باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي a على العدد الطبيعي غير المعدوم b فإن:

$$PGCD(a,b) = PGCD(b,r) ...(1)$$

مثال:

$$70 = 24 \times 2 + 22$$
$$PGCD(70,24) = PGCD(24,22) = 2$$

طرائق إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

هناك عدة طرائق لحساب القاسم المشترك لعددين طبيعيين نذكر منها:

أ) الطريقة الأولى (تعتمد على الخاصية التالية):

n يقسم العددين الطبيعيين a , b حيث $a > b$ يعني أن n يقسم b وباقي القسمة الإقليدية لـ a على b

لحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين نتبع الخاصية السابقة **(1)** **(تسمى خوارزمية إقليدس).**

مثال: لحساب $PGCD(70,24)$ نتبع ما يلي:

نقسم 70 على 24 نجد: $70 = 24 \times 2 + 22$

نقسم 24 على 22 نجد: $24 = 22 \times 1 + 2$

نقسم 22 على 2 نجد: $22 = 11 \times 2 + 0$

نلاحظ أن 2 هو آخر باقي غير معدوم في الخوارزمية ونكتب: $PGCD(70,24) = 2$

ب) الطريقة الثانية: طريقة الفروق

تعتمد على الخاصية التالية:

العدد n يقسم العددين a و b (حيث : $a > b$ يعني أن n يقسم b ويقسم الفرق $(a-b)$.

مثال:

لحساب PGCD للعددين 612 ، 357 نتبع الطريقة التالية:

$$612 - 357 = 255$$

$$357 - 255 = 102$$

$$255 - 102 = 153$$

$$153 - 102 = 51$$

$$102 - 51 = 51$$

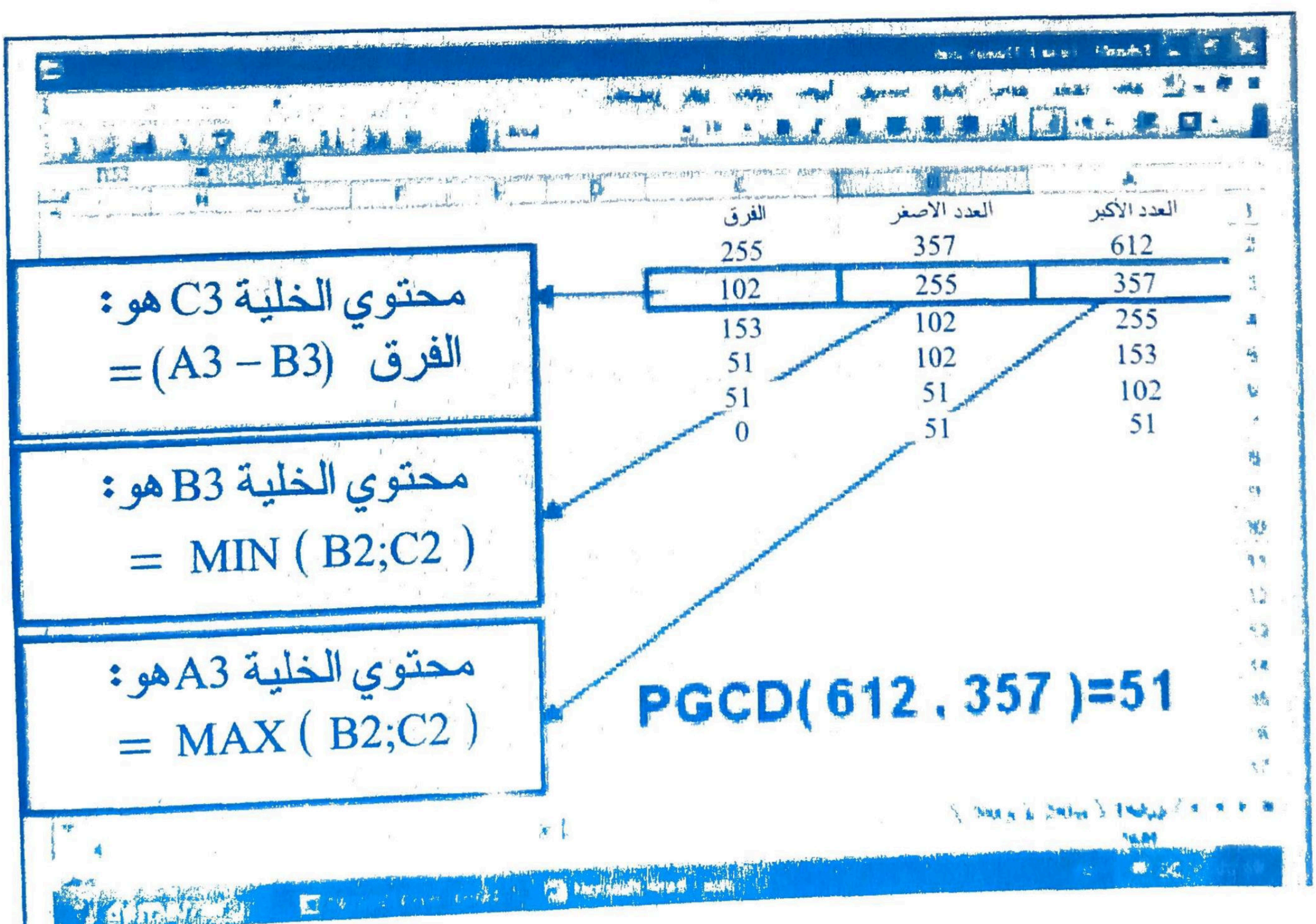
$$51 - 51 = 0$$

نقول أن: $PGCD\ (612\ ,\ 357) = 51$.

فالقاسم المشترك الأكبر لعددين هو آخر فرق غير معدوم في خوارزمية عمليات الطرح المتتالية.

الاستعانة بمجدول لحساب القاسم المشترك الأكبر:

الطريقة الأولى:



الطريقة الثانية:

	A	B	C
1	A	B	C
2	612	357	255
3	357	255	102
4	255	102	51
5	102	51	0

PGCD(612 . 357) = 51

محتوى الخلية C2هو: =MOD(A2 ; B2)

محتوى الخلية A3هو: =MAX(B2 ; C2)

محتوى الخلية B3هو: =MIN(B2 ; C2)

محتوى الخلية C3 هو: =MOD(A3; B3)

الطريقة الثالثة:

$a = bq + r$ ، حيث: q حاصل القسمة و r باقي القسمة.

	A	B	C	D
1	a	b	q	r
2	612	357	1	255
3	357	225	1	102
4	255	102	2	51
5	102	51	2	0

PGCD(612 . 357) = 51

محتوى الخلية D2هو: = A2 - B2*C2

محتوى الخلية C2 هو: = ent(A2 / B2)

محتوى الخلية A3 هو: = Max(B2 ; D2)

محتوى الخلية B3 هو: =MIN(B2;D2)

محتوى الخلية C3 هو: = ent(A3 / B3)

محتوى الخلية D3 هو: = A3 - B3*C3