https://prof27math.weebly.com/

معارف

1 - قواسم عدد طبيعي

a و b عددان طبيعيان حيث b يختلف عن 0.

تعريف: b قاسم للعدد a يعني باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b هو 0.

تعريف: b قاسم للعدد a يعني يوجد عدد طبيعي q حيث $a = b \times q$.

ملاحظة: إذا كان b قاسما للعدد a، نقول إن a يقبل القسمة على b و نقول أيضا إن a مضاعف b.

أمثلة:
- 7 قاسم 35 لأن $35 : 7 = 5$ (لأن حاصل القسمة الإقليدية للعدد 35 على 7 هو 5 و الباقي هو 0).
- 6 ليس قاسما للعدد 45 (لأن باقي القسمة الإقليدية للعدد 45 على 6 هو 3 و هذا العدد يختلف عن 0).

2 - مجموعة قواسم عدد طبيعي

a عدد طبيعي.

تعريف: مجموعة قواسم العدد a هي مجموعة الأعداد الطبيعية b التي تقسم a.

ملاحظات:
- 1 هو قاسم لكل عدد طبيعي لأن من أجل كل عدد طبيعي a : $a = a \times 1$.
- كل عدد طبيعي غير معدوم يقسم نفسه لأن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a : $a = a \times 1$.
- كل عدد طبيعي غير معدوم هو يقسم العدد 0 لأن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a : $0 = a \times 0$.

مثال: مجموعة قواسم العدد 35 هي [35 ; 7 ; 5 ; 1].

3 - قاسم مشترك لعددين طبيعيين

a ، b عددان طبيعيان.

تعريف: نسمي قاسما مشتركا للعددين a و b كل عدد طبيعي يقسم a و يقسم b.

ملاحظة: 1 هو قاسم مشترك لكل عددين a و b.

مثال: 3 هو قاسم مشترك للعددين 24 و 15 لأن $24 = 3 \times 8$ و $15 = 3 \times 5$

مجموعة قواسم العدد 24 هي [24 ; 12 ; 8 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1].

مجموعة قواسم العدد 18 هي [18 ; 9 ; 6 ; 3 ; 2 ; 1].

مجموعة القواسم المشتركة للعددين 24 و 18 هي [6 ; 3 ; 2 ; 1].

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

4 - القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

a ، b عددان طبيعيان.

من بين القواسم المشتركة للعددين a و b، يوجد قاسم أكبر من بقية هذه القواسم المشتركة.

تعريف نسمي العنصر الأكبر في مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b، القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و يرمز له pgcd (a ; b).

مثال مجموعة القواسم المشتركة للعددين 24 و 18 هي {6 ; 3 ; 2 ; 1}.

القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 18 هو 6. نكتب : pgcd (24 ; 18) = 6.

5 - العددان الطبيعيان الأوليان فيما بينهما

a ، b عددان طبيعيان.

تعريف a ، b أوليان فيما بينهما يعني pgcd (a ; b) = 1.

مثال
- العددان 17 و 8 أوليان فيما بينهما لأن pgcd (17 ; 8) = 1.
- العددان 12 و 9 ليسا أوليين فيما بينهما لأن pgcd (12 ; 9) = 3 (أي pgcd (12 ; 9) ≠ 1).

6 - الكسور الغير قابلة للاختزال

a ، b عددان طبيعيان غير معدومين.

تعريف الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للإختزال إذا و فقط إذا كان العددان a و b أوليين فيما بينهما.

مثال
- الكسر $\frac{25}{13}$ غير قابل للاختزال لأن pgcd (25 ; 13) = 1 (أي 25 و 13 أوليان فيما بينهما).
- الكسر $\frac{34}{18}$ قابل للاختزال لأن pgcd (34 ; 18) = 2.

نكتب $\frac{34}{18} = \frac{17 \times 2}{17 \times 2} = \frac{17}{9}$

بما أن pgcd (17 ; 9) = 1

فإن الكسر $\frac{17}{9}$ غير قابل للاختزال.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

طرائق

1 - تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي

طريقة لتعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي، نعين كل التفكيكات الممكنة على شكل جداء عاملين لهذا العدد.

تمرين عين مجموعة قواسم العدد 68.

حل لدينا :

$68 = 1 \times 68$
$68 = 2 \times 34$
$68 = 4 \times 17$

إذن مجموعة قواسم 68 هي $\{68 ; 34 ; 17 ; 4 ; 2 ; 1\}$.

2 - تعيين مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

طريقة لتعيين مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين، نعين مجموعة قواسم كل من العددين ثم نستنتج مجموعة القواسم المشتركة.

تمرين عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين 30 و 42.

حل لدينا :

$30 = 1 \times 30$
$30 = 2 \times 15$
$30 = 3 \times 10$
$30 = 5 \times 6$

$42 = 1 \times 42$
$42 = 2 \times 21$
$42 = 3 \times 14$
$42 = 6 \times 7$

مجموعة قواسم 30 هي $\{30 ; 15 ; 10 ; 6 ; 5 ; 3 ; 2 ; 1\}$.
و مجموعة قواسم 42 هي $\{42 ; 21 ; 14 ; 7 ; 6 ; 3 ; 2 ; 1\}$.
إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين 30 و 42 هي $\{6 ; 3 ; 2 ; 1\}$.

3 - حساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

طريقة لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين، يمكن استعمال خوارزمية إقليدس.

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b حيث $a > b$ ؛ نجري القسمة الإقليدية للعدد a على b
أي $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$. إذا كان $r = 0$ فإن $\text{pgcd}(a ; b) = b$ و إذا كان $r \neq 0$
نواصل إجراء القسمات الإقليدية للعدد b على r و هكذا حتى نتحصل على باقي معدوم.
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو آخر باقٍ غير معدوم في القسمات الإقليدية المتتابعة.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

تمرين عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 218 و 162.

حل لدينا :

$218 = 162 \times 1 + 56$

$162 = 56 \times 2 + 50$

$56 = 50 \times 1 + 6$

$50 = 6 \times 8 + \boxed{2}$

$6 = 2 \times 3 + 0$

إذن : القاسم المشترك الأكبر للعددين 218 و 162 هو 2. أي $\text{pgcd}(218 ; 162) = 2$

طريقة لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين يمكن إستعمال طريقة الفوارق.

تمرين عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 261 و 203.

حل لدينا :

$261 - 203 = 58$

$203 - 58 = 145$

$145 - 58 = 87$

$87 - 58 = 29$

$58 - 29 = \boxed{29}$

$29 - 29 = 0$

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 261 و 203 هو 29 أي $\text{pgcd}(261 ; 203) = 29$.

4 - كتابة كسر على شكل كسر غير قابل للاختزال

طريقة لكتابة كسر $\frac{a}{b}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال، نحسب القاسم المشترك الأكبر d للعددين a و b و يكون الكسر $\frac{a : d}{b : d}$ هو الكسر الغير قابل للاختزال الذي يساوي $\frac{a}{b}$.

تمرين أكتب الكسر $\frac{34}{51}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

حل لدينا :

$51 = 3 \times 34 + 17$

$34 = 2 \times 17 + 0$

إذن $\text{pgcd}(51 ; 43) = 17$

و بالتالي : $\frac{34}{51} = \frac{17 \times 2}{17 \times 3} = \frac{2}{3}$ أي $\frac{34}{51} = \frac{2}{3}$.

إذن الكسر $\frac{2}{3}$ هو الكسر غير القابل للاختزال الذي يساوي $\frac{34}{51}$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

طريقة إستعمال حاسية عليمة

لجعل كسر على شكل كسر غير قابل للاختزال باستعمال حاسبة علمية، ننفذ البرنامج التالي :

ظهور النتيجة	=	ضب المقام	$\frac{a}{b/c}$	ضب البسط

تمرين إجعل كلا من الكسرين التاليين $\frac{36}{128}$ و $\frac{345}{165}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

حل اختزال الكسر $\frac{36}{128}$.

تنفيذ البرنامج السابق :

32 ـلـ 9	=	128	$\frac{a}{b/c}$	36

ينتج أن : $\frac{36}{128} = \frac{9}{32}$

اختزال الكسر $\frac{345}{165}$.

بتنفيذ البرنامج السابق تظهر النتيجة التالية 11 ـلـ 12 ـلـ 1 على شاشة الحاسبة.

نكتب : $\frac{345}{165} = 1 + \frac{12}{11} = \frac{23}{11}$. إذن $\frac{345}{165} = \frac{23}{11}$.

طريقة إستعمال حاسبة بيانية

لجعل كسر على شكل كسر غير قابل للإختزال باستعمال حاسبة بيانية، ننفذ البرنامج التالي :

ENTER	MATH	ضب المقام	+	ضب البسط	1- Frac	MATH

تمرين إجعل الكسر $\frac{285}{45}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

حل تنفيذ البرنامج السابق :

ENTER	MATH	45	+	285	1- Frac	MATH

تظهر النتيجة 285/45 ▶ Frac 57/9 على شاشة الحاسبة.

و نكتب : $\frac{285}{45} = \frac{57}{9}$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

https://prof27math.weebly.com/

تمارين محلولة

تمرين 1 1 • بيّن أن الكسر $\frac{170}{578}$ قابل للاختزال.

2 • احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 170 و 578.

3 • اكتب الكسر $\frac{170}{578}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

حل

1 • نلاحظ أن العددين 170 و 578 يقبلان القسمة على 2. إذن الكسر $\frac{170}{578}$ قابل للاختزال.

2 • حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 170 و 578. (استعمال خوارزمية إقليدس)

لدينا :

$$578 = 170\times3 + 68$$
$$170 = 68\times2 + \boxed{34}$$
$$68 = 34\times2 + 0$$

إذن $pgcd\,(578 ; 170) = 34$.

3 • نلاحظ أن $170 = 5\times34$ و $578 = 17\times34$

إذن $\frac{5}{17} = \frac{5\times34}{17\times34} = \frac{170}{578}$ و بالتالي : $\frac{170}{578} = \frac{5}{17}$.

ينتج أن $\frac{5}{17}$ هو الكسر الغير قابل للاختزال و الذي يساوي $\frac{170}{578}$.

تمرين 2 يوجد في كيس 161 قلما أحمر و 133 قلما أزرق. نريد وضعها في علب بحيث كل العلب تتضمن نفس عدد الأقلام وكل علبة تتضمن أقلاما من نفس اللون.

1 • ما هو أكبر عدد من الأقلام التي يمكن وضعها في كل علبة ؟

2 • ما هو أكبر عدد من العلب من كل لون ؟

حل

1 • عدد الأقلام في كل علبة هو قاسم لكل من العددين 161 و 133، فهو قاسم مشترك لهما.

حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 161 و 133، باستعمال خوارزمية إقليدس.

$$161 = 133 \times 1 + 28$$
$$133 = 28 \times 4 + 21$$
$$28 = 21 \times 1 + \boxed{7}$$
$$21 = 7 \times 3 + 0$$

إذن $pgcd\,(161 ; 133) = 7$.

و بالتالي : أكبر عدد من الأقلام التي يمكن وضعها في كل علبة هو 7.

2 • $161 = 7\times23$ و $133 = 7\times19$

يمكن تشكيل 23 علبة من الأقلام الحمراء و 19 علبة من الأقلام الزرقاء.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/