تطبيقات نموذجية

تطبيق 1

ABC مثلث قائم في B و لتكن القطعة $[BH]$ العمود النازل من B على (AC)

1) أعط عبارة كل من $\cos\hat{A}$ و $\sin\hat{A}$ و $\tan\hat{A}$

أ) في المثلث ABC ب) في المثلث ABH

2) عبر بطريقتين مختلفتين عن $\cos\hat{C}$ ، $\sin\hat{C}$ و $\tan\hat{C}$

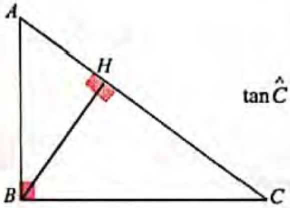
الحل

1) أ) في المثلث ABC

$$\cos\hat{A}=\frac{AB}{AC} \qquad \sin\hat{A}=\frac{BC}{AC} \qquad \tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}$$

ب) في المثلث ABH

$$\cos\hat{A}=\frac{AH}{AB} \qquad \sin\hat{A}=\frac{BH}{AB} \qquad \tan\hat{A}=\frac{BH}{AH}$$

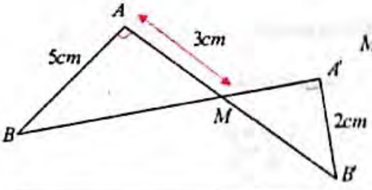


2) في المثلث BHC لدينا $\cos\hat{C}=\frac{CH}{BC}$ و $\sin\hat{C}=\frac{BH}{BC}$ ، $\tan\hat{C}=\frac{BH}{HC}$

- في المثلث ABC

$$\cos\hat{C}=\frac{BC}{AC} \qquad \sin\hat{C}=\frac{AB}{AC} \qquad \tan\hat{C}=\frac{AB}{BC}$$

تطبيق 2



لتكن $[AB']$ و $[A'B]$ متقاطعتين في النقطة M

1) اشرح لماذا $A\hat{M}B=A'\hat{M}B'$

2) اشرح لماذا $\frac{AB}{AM}=\frac{A'B'}{A'M}$

3) احسب الطول $A'M$

الحل

1) الزاويتان $A'\hat{M}B'=A\hat{M}B$ متقابلتان بالرأس و بالتالي فهما متقايستان

إذن $A\hat{M}B=A'\hat{M}B'$

2) في المثلث MAB لدينا (1)......................$\tan A\hat{M}B = \dfrac{AB}{AM}$

في المثلث $MA'B'$ لدينا (2)......................$\tan A'\hat{M}B' = \dfrac{A'B'}{A'M}$

و بما ان $A\hat{M}B = A'\hat{M}B'$ فإن $\tan \hat{A}MB = \tan(\hat{A'}MB')$

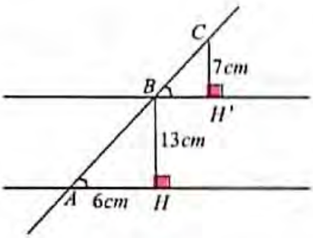
إذن من (1) و (2) نجد $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{A'B'}{A'M}$

3) حساب الطول $A'M$

بتعويض قيمة كل من AB و AM و $A'B'$ في المساواة $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{A'B'}{A'M}$ فنجد

$$A'M = \frac{2\times 3}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2cm$$

تطبيق 3



(d) و (d') مستقيمان متوازيان و (AC) قاطع لهما في A و B

H' المسقط العمودي لـ C على (d').

H المسقط العمودي لـ B على (d).

1) استنتج أن $\dfrac{CH'}{BH'} = \dfrac{BH}{AH}$

2) احسب الطول BH'

الحل

1) في المثلث AHB لدينا (1)..................$\tan B\hat{A}H = \dfrac{BH}{AH}$

في المثلث $BH'C$ لدينا (2)..................$\tan C\hat{B}H' = \dfrac{CH'}{BH'}$

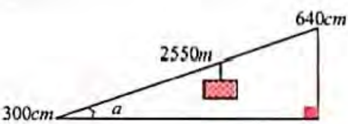
بما ان $B\hat{A}H = C\hat{B}H'$ فإن $\tan B\hat{A}H = \tan C\hat{B}H'$

و بالتالي من (1) و (2) ينتج (I)....................$\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{CH'}{BH'}$

2) بتعويض قيمة CH' و BH و AH في (I) نجد

$\dfrac{13}{6} = \dfrac{7}{BH'}$ و منه $BH' = \dfrac{6\times 7}{13} = \dfrac{42}{13}cm$ إذن $BH' = \dfrac{42}{13}cm$

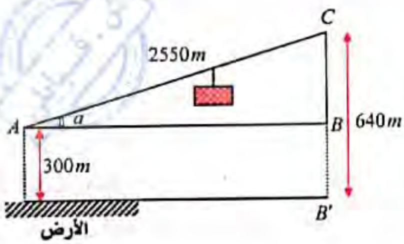
تطبيق 4



تنطلق تليفيريك من ارتفاع قدره $300m$ و تصل إلى ارتفاع قدره $640m$ طول الحبل هو $2550m$.

- احسب بالتدوير إلى الدرجة القيس a للزاوية المشكلة من الحبل و الأفق.

الحل



في المثلث ABC القائم في B لدينا

$$\sin\hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

$$BC = CB' - BB' = 640 - 300 = 340m$$

إذن $\sin\hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{340}{2550} = \frac{34}{255}$

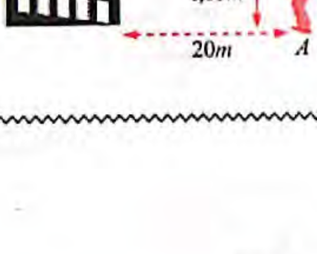
و بالتالي $\hat{A} \approx 7{,}66$

و القيمة المدورة إلى الدرجة هي 8 درجة .

تطبيق 5

يقف شخص في النقطة A على مسافة $20m$ من حائط عمارة ، ينظر هذا الرجل إلى قدمي رجل آخر فوق العمارة بزاوية قدرها $20°$
أحسب علو هذه العمارة (تدور النتيجة إلى الوحدة)

الحل



لدينا $AC = 1{,}65$ و $BC = 20m$

في المثلث CBD القائم في B لدينا

$\cos 25° = \frac{BC}{DC} = \frac{20}{DC}$ و منه $DC = \frac{20}{\cos 20°} = 21{,}83$

إذن $DC = 21{,}83$

في نفس المثلث لدينا $\sin 20° = \frac{BD}{DC}$ و منه

$$BD = DC \times \sin 20° = 21{,}83 \times 0{,}342 = 7{,}466$$

إذن $BD \approx 7{,}466M$

علو العمارة هو $h = AC + BD$

$$h \approx 1{,}65 + 7{,}466 = 9{,}116$$

و القيمة المدورة إلى الوحدة هي $9m$

تطبيق 6

x قيس لزاوية حادة .

- عين $\cos x$ و $\sin x$ إذا علمت أن $\tan x = \sqrt{63}$

الحل

$\tan x=\sqrt{63}$ تعني $\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{63}$..............(1)

لدينا أيضا $\sin^2 x+\cos^2 x=1$...............(2)

من (1) نجد $\sin x=\sqrt{63}\times\cos x$

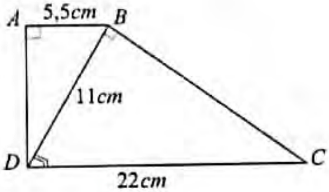
نعوض عبارة $\sin x$ في (2) نجد

$\left(\sqrt{63}\times\cos x\right)^2+\cos^2 x=1$ أي $63\cos^2 x+\cos^2 x=1$ أي $64\cos^2 x=1$

ومنه $\cos^2 x=\frac{1}{64}$ إذن $\cos x=\frac{1}{8}$

و بالتالي $\sin x=\sqrt{63}\times\cos x=\sqrt{63}\times\frac{1}{8}$ إذن $\sin x=\frac{\sqrt{63}}{8}$

تطبيق 7



$ABCD$ رباعي بحيث

$AB=5{,}5\ cm$ و $BD=11\ cm$

و $CD=22\ cm$ بالإضافة

$(AB)\perp(AD)$ و $(BD)\perp(BC)$

- برهن أن (AB) يوازي (CD)

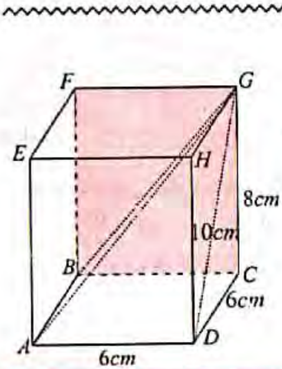
الحل

- في المثلث ABD لدينا $\cos\hat{B}=\frac{AB}{BD}=\frac{5{,}5}{11}=\frac{1}{2}$ و منه $\hat{B}=60°$

- في المثلث BDC لدينا $\cos\hat{D}=\frac{BD}{DC}=\frac{11}{22}=\frac{1}{2}$ و منه $\hat{D}=60°$ ذن

$\hat{D}=\hat{B}$ ($\hat{D}$ و $\hat{B}$ متساويتان بالتبادل الداخلي) و بالتالي المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان .

تطبيق 8



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم حيث

$AD=DC=6cm$ و $GC=8cm$ و $GD=10cm$

1) احسب بـ cm^3 حجم الهرم $GABCD$

2) أ)باعتبار المثلث ADG القائم في D

احسب بالتدوير إلى الدرجة قيس

الزاوية $A\hat{G}D$

ب) احسب بالتدوير الى 0,1 طول

الضلع AG

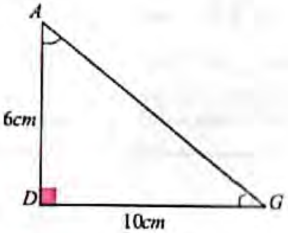
الحل

1) حجم الهرم $GABCD$ يساوي $V=\frac{1}{3}B\times h$ حيث B مساحة القاعدة و h طول الإرتفاع

$B = AD\times DC = DC^2 \quad h = CG$

إذن $V=\frac{1}{3}\times DC^2\times CG = \frac{1}{3}\times 6^2\times 8^2 = \frac{36\times 64}{3} = 768\ cm^3$

2) ا) حساب قيس الزاوية $A\hat{G}D$.



لحساب قيس الزاوية $A\hat{G}D$ نستعمل $\tan(\hat{G})$

$\tan(\hat{G})=\frac{AD}{DG}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0,6$ إذن $A\hat{G}D\approx 30,96$

و القيمة المدورة إلى الدرحة هي 31 درجة

ب) حساب الطول AG

لحساب الطول AG نستعمل $\cos(\hat{G})$ او $\sin(\hat{G})$

لدينا $\cos(\hat{G})=\frac{DG}{AG}$ و منه $AG=DG\times\cos\hat{G}$

إذن $AG=DG\times\cos\hat{G} = 10\times 0,8571 = 8,57cm$ و القيمة المدورة إلى 0,1 هي $8,6cm$

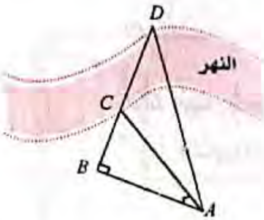
تطبيق 9

اراد شخص متخصص في الخرائط قياس الطول CD لنهر .

إليك المعطيات التي أخذها من الميدان

$B\hat{A}D=60°$ و $AB=200m$

و $B\hat{A}C=20°$ و $A\hat{B}D=90°$



1) احسب القيمة المضبوطة لـ BC ثم القيمة المدورة إلى الوحدة .

2) أحسب القيمة المضبوطة لـ BD ثم القيمة المدورة إلى الوحدة.

3) استنتج القيمة المدورة إلى 0,01 لطول النهر

الحل

2) لحساب الطول BC نستعمل $\tan 20°$

لدينا $\tan 20° = \frac{BC}{AB}$ و منه $\approx 72,78\,m$ $BC = AB\times\tan(20°) \approx 200\times 0,3639$

و القيمة المدورة إلى الوحدة هي $73m$

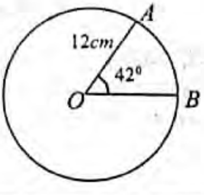
2) في المثلث BAD لدينا $\tan B\hat{A}D=\frac{BD}{AB}$

و منه $BD = AB\times\tan B\hat{A}D$ اي $BD = AB\times\tan 60° = 200\times\sqrt{3}\approx 346{,}41$
و القيمة المدورة إلى الوحدة هي $346m$

3) استنتاج الطول CD

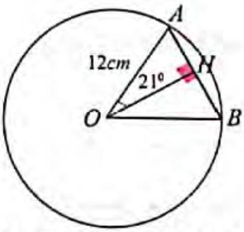
لدينا $BD = BC + CD$ و منه $CD = BD - BC$
$= 346 - 73 = 273m$

تطبيق 10



النقطتين A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O
و طول نصف قطرها $12cm$ و $A\hat{O}B = 42°$
$[OH]$ العمود النازل من O في المثلث OAB
احسب القيمة المضبوطة للطول AB ثم أعط القيمة المدورة إلى $0{,}01$ سنتمتر .

الحل

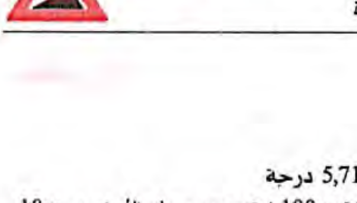


بما ان A و B تنتميان إلى نفس الدائرة فإن $OA = OB = 12cm$
إذن المثلث OAB متقايس الساقين راسه الأساسي O و بالتالي العمود $[OH]$ هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$
و عليه $B\hat{O}H = H\hat{O}A = 21°$

- حساب الطول AH

في المثلث OHA لدينا $\sin 21° = \dfrac{AH}{OA}$ ومنه $AH = OA\sin 21°$
بما ان H منتصف $[AB]$ فإن $AB = 2AH$ اي $AB = 2\times OA\times\sin 21°$
$AB \approx 2\times 12\times 0{,}358367949 \approx 8{,}60$

تطبيق 11



الشكل المقابل يمثل إشارة مرور تحذر من منحدر خطير

1) احسب بالتدوير إلى $0{,}01$ درجة قيس زاوية الإنحدار

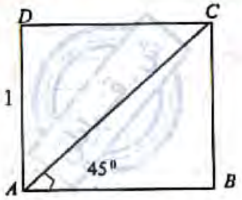
2) ماذا تعني 10% المكتوبة على الصورة

الحل

1) $\tan a = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ و منه $a = \tan^{-1}(0{,}1)$
$a \approx 5{,}710593137$ و القيمة المدورة إلى $0{,}01$ هي $5{,}71$ درجة

2) 10% المكتوبة على الصورة تعني أنه كلما قطع مسافة $100m$ إرتفع عن سطح الأرض ب $10m$

تطبيق 12



$ABCD$ مربع طول ضلعه 1

1) اشرح لماذا $AC=\sqrt{2}$

2) اشرح لماذا $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45°=1$

الحل

1) AC وترا في المثلث ABC القائم في B

حسب نظرية فيثاغورث لدينا $AB^2+BC^2=AC^2$

$AC^2=1^2+1^2=2$ ومنه $AC=\sqrt{2}$

2) في المثلث ABC لدينا

$$\cos 45°=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

في نفس المثلث ABC لدينا $\sin 45°=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan 45°=\frac{\sin 45°}{\cos 45°}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

إليك جدول بعض الزوايا الشهيرة و قيم sin و cos و tan الموافقة لها.

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

تطبيق 13

اثبت ما يلي حيث x عدد حقيقي

1) $\sin^4 x-\cos^4 x+2\sin^2 x+4\cos^2 x=3$

2) $\left(\sin x+\cos x\right)^2+\left(\sin x-\cos x\right)^2=2$

3) $\cos^3 x+\cos x\sin^2 x=\cos x$

$\tan x\times\cos x=\sin x$

الحل

1) $\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2-\left(\cos^2 x\right)^2$

$=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\sin^2 x-\cos^2 x$

لأن $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

إذن

$$\begin{aligned}\sin^4 x-\cos^4 x+2\sin^2 x+4\cos^2 x&=\sin^2 x-\cos^2 x+2\sin^2 x+4\cos^2 x\\&=3\sin^2 x+3\cos^2 x\\&=3\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\\&=3\times 1\\&=3\end{aligned}$$

2) $\left(\cos x+\sin x\right)^2=\cos^2 x+\sin^2 x+2\cos x\sin x$

$\left(\cos x-\sin x\right)^2=\cos^2 x+\sin^2 x-2\cos x\sin x$

إذن $\left(\cos x+\sin x\right)^2+\left(\cos x+\sin x\right)^2=2\cos^2 x+2\sin^2 x$

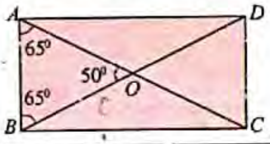
$=2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2\times 1=2$

3) $\cos^3 x+\cos x\sin^2 x=\left(\cos x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\left(\cos x\right)\times 1=\cos x$

4) $\tan x\times\cos x=\dfrac{\sin x}{\cos x}\times\cos x=\sin x$

تطبيق 14

$ABCD$ مستطيل طول قطره $16cm$ قطراه متقاطعان في النقطة O فيكونان زاوية حادة قيسها $50°$



1) بين ان $O\hat{A}B=O\hat{B}A=65°$

2) أحسب القيمة المقربة إلى 0,1 للعددين $\sin 65°$ و $\cos 65°$

3) احسب طول و عرض المستطيل .

الحل

1) بما ان القطران $[BD]$ و $[AC]$ متقاطعان في النقطة O فإن $OA=OB$ و بالتالي المثلث OAB متقايس الساقين راسه الأساسي O

إذن $O\hat{A}B=O\hat{B}A$

و بما ان $O\hat{A}B+O\hat{B}A+B\hat{O}A=180°$ فإن $O\hat{A}B+O\hat{B}A=130°$ و عنيه $O\hat{A}B=O\hat{B}A=65°$

2) باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\sin 65°=0,9$ و $\cos 65°=0,4$

$MODE\ DRG\ \sin\ 65\ =\ 0,906307787$

$MODE\ DRG\ \cos\ 65\ =\ 0,122618261$

3) لدينا $\cos 65°=\dfrac{AB}{BD}$ و منه $AB=BD\times\cos 65°=16\times 0,4=6,4cm$

لدينا $\sin 65°=\dfrac{AD}{BD}$ و منه $AD=BD\times\sin 65°$ إذن $AD=16\times 0,9=14,4cm$

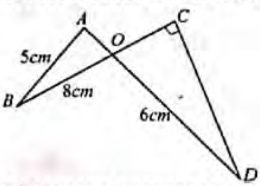
تمارين و مسائل

1

ABC مثلث قائم في C
أنقل ثم أتمم المساويات التالية

ا) $\frac{CA}{AB} = \cos ... = \sin ...$ ، ب) $\frac{CB}{AB} = \cos ... = \sin ...$ ، ج) $\frac{CA}{CB}$ ، د) $\frac{CB}{CA}$

2



القطعتان $[AD]$ و $[BC]$ متقاطعتان في النقطة O

1) اشرح لماذا $C\hat{D}O = A\hat{B}O$ ؟

2) اشرح لماذا $\frac{AB}{BO} = \frac{CD}{OD}$

3) احسب الطول CD

3

باستعمال الآلة الحاسبة اعط القيمة المدورة إلى 0,001 لكل مما يلي

ا) $\sin 15°$ ، $\sin 30°$ ، $\sin 75°$

ب) $\tan 33°$ ، $\tan 55°$ ، $\tan 82°$

4

باستعمال الآلة الحاسبة اعط القيمة المدورة إلى الدرجة للزاوية $\hat{A}$ في كل ممايلي

ا) $\cos A = \frac{2}{3}$ ،

ب) $\sin \hat{A} = \sqrt{0,6}$

ج) $\tan A = \frac{7}{3}$

5

ABC مثلث قائم في A حيث $AB = 5\sqrt{2}$ و $B = 35°$
احسب الطول AC تعطى النتيجة مدورة إلى 0,01

6

ABC مثلث قائم في A حيث $AB = 5\sqrt{2}$ و $B = 35°$
إذا علمت ان $\sin x = \frac{2}{5}$

ا) احسب $\cos x$
ب) استنتج قيمة $\tan x$

7

إذا علمت أن $\tan x = \frac{7}{6}$ و $\sin x = \frac{5}{7}$
فاحسب القيمة المضبوطة لـ $\cos x$
ثم تحقق من المساواة
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

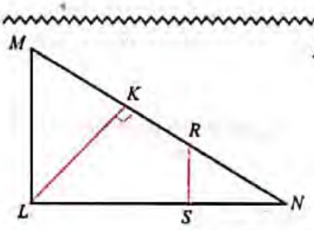
8

في كل حالة من الحالات التالية يوجد جواب واحد صحيح ما هو
1) LMN مثلث قائم في L إذن $\sin \hat{M}$ تساوي
ا) $\frac{LN}{LM}$ ، ب) $\frac{LM}{MN}$ ، ج) $\frac{LN}{NM}$
2) ABC مثلث قائم في B إذن $\tan \hat{B}$ تساوي
ا) $\frac{AC}{AB}$ ، ب) $\frac{BC}{BA}$ ، ج) $\frac{AB}{BC}$

9

ABC مثلث قائم في A بحيث $\hat{B} = 60°$ و $BC = 9\,cm$
1) ا) اعط شكلا توضح فيه المعطيات
ب) احسب الطول AB تعطى النتيجة مدورة إلى 0,01 ثم الطول AC
2) ا) D نقطة من الضلع $[AC]$ بحيث $AD = 3$
احسب بالتدوير إلى الدرجة قيس الزاوية $A\hat{B}D$
ب) من C انشئ العمود على المستقيم (BD) يقطع (BD) في النقطة E
ج) برهن أن النقط A, B, C, E تنتمي الى نفس الدائرة
3) ا) ارسم منصف الزاوية $A\hat{B}C$ هذا المنصف يقطع $[AC]$ في النقطة G
ب) احسب بالتدوير إلى 0,01 الطول AG

10



تعطى $MN = 8\,\text{cm}$ و $ML = 4{,}8\,\text{cm}$ و $LN = 6{,}4\,\text{cm}$
1) برهن أن المثلث LMN قائم
2) احسب القيمة المدورة إلى الدرجة لقيس الزاوية $L\hat{N}M$
3) لتكن K نقطة تقاطع العمود النازل من L على المستقيم (MN)
بين أن $LK = 3{,}84\,\text{cm}$
4) العمود على (LN) و المار من S يقطع (LN) في النقطة R
احسب الطول RS