تمارين حســــاب المثلثـــــات

ملاحظة: في التمارين التالية تعطى النتائج بالتدوير إلى الوحدة

التمرين 01:

وحدة الطول هي cm

ABC مثلث حيث $AB = 6,9$; $BC = 9,2$; $AC = 11,5$.

1) بين أن المثلث ABC قائم.

2) أ) أحسب قيس الزاوية $\widehat{ACB}$ بالتدوير للوحدة.

ب) استنتج قيس الزاوية $\widehat{BAC}$ بالتدوير للوحدة.

3) لتكن D نظيرة B بالنسبة للمستقيم (AC) .

أحسب مساحة الرباعي ABCD .

التمرين 02:

ارسم الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 5 cm ، وليكن [AB] قطرا لها.

لتكن M نقطة من [OA] حيث: $OM = 1,7\ cm$ ، المستقيم العمودي على (AB) والمار من M يقطع الدائرة في النقطتين C و D .

1) أ) أحسب طول القطعة [OC] .

ب) أحسب قيس الزاوية $\widehat{MOC}$.

ج) استنتج قيس الزاوية $\widehat{BOC}$.

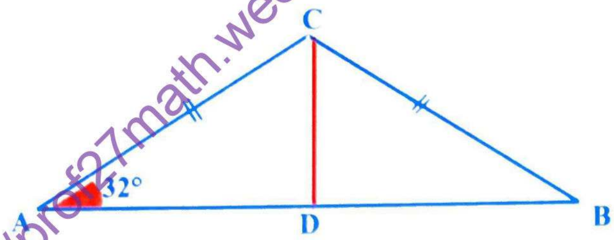
2) بين أن قيس الزاوية $\widehat{MBC}$ بتقريب درجة (1^o) هو 35^o.

3) بين أن القيمة المقربة بـ mm للطول BC هي 8,2 cm .

4) ما نوع المثلث ABC ؟ علل .

5) أحسب القيمة المقربة بـ mm للطول AC .

التمرين 03:



إليك الشكل المقابل.

احسب الارتفاع CD بالتدوير للوحدة ،

علما أن:

$\widehat{CAD} = 32^\circ$; $AB = 7{,}2\,cm$

التمرين 04:

ABC مثلث قائم في A حيث: $AC = 5$ cm ، $BC = 13$ cm .

1) أحسب AB .

2) بين أن قيس الزاوية $\widehat{ABC}$ بالتدوير للوحدة هو: 23° .

3) ارسم الدائرة (C_1) المحيطة بالمثلث ABC وليكن O مركزها، حدد وضعية النقطة O .

4) احسب قيس الزاوية $\widehat{AOC}$ بالتدوير للوحدة، وضح.

5) الدائرة (C_2) ذات المركز A والمارة من C تقطع الدائرة (C_1) في النقطة E.

احسب (مع التوضيح) قيس الزاوية $\widehat{AEC}$ بالتدوير للوحدة

(A

التمرين 05:

نعتبر الدائرة (C) ذات المركز O ونصف القطر 6 cm ، وليكن [AB] قطرا لها.

لتكن M نقطة من الدائرة (C) حيث: $\widehat{MAB} = 36^\circ$.

1) بين أن المثلث ABM قائم.

2) أحسب AM ، معطيا النتيجة بتقريب mm.

3) أنشئ المستقيم (D) المماس للدائرة (C) في B.

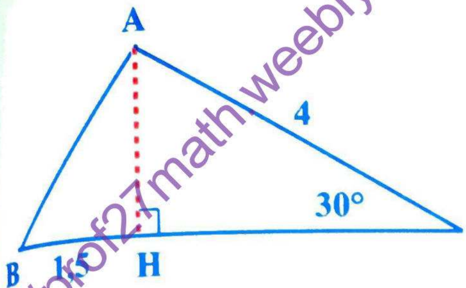
لتكن P نقطة من المستقيم (D) حيث: $AP = 14$ cm .

بين أن المثلث ABP قائم.

4) أحسب الطول PB، معطيا بالتقريب للوحدة.

التمرين 06:

في الشكل المقابل ABC مثلث ارتفاعه [AH] ، يعطى:



$\widehat{ACB}=30^\circ$; $BH=1,5cm$; $AC=4cm$

1) احسب AH .

2) استنتج قيس الزاوية $\widehat{BAH}$ ، بالتدوير للوحدة.

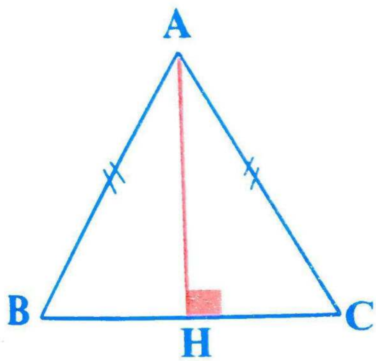
3) هل المثلث ABC قائم؟ علل.

التمرين 07:

حساب sin ، cos و tan الزاويتين: 30° و 60° .

ليكن ABC مثلث متقايس الأضلاع، طول ضلعه 1.

[AH] ارتفاع للمثلث.



1) أحسب BH ، ثم احسب AH .

2) ما هو قيس الزاوية $\widehat{ABH}$ ؟ مستنتجا قيسا للزاوية $\widehat{BAH}$.

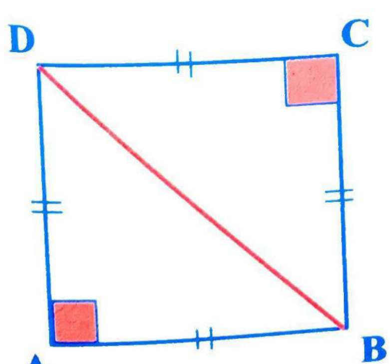
3) أحسب sin و cos الزاويتين $\widehat{ABH}$ ، $\widehat{BAH}$.

4) استنتج tan الزاويتين $\widehat{ABH}$ و $\widehat{BAH}$.

التمرين 08:

حساب sin ، cos و tan زاوية قيسها 45° .

ليكن المربع ABCD طول ضلعه 1.



1) أحسب BD .

2) ما هو قيس الزاوية $\widehat{ABD}$ ؟

3) أحسب sin و cos هذه الزاوية.

4) استنتج tan هذه الزاوية.

التمرين 09:

وحدة الطول هي cm.

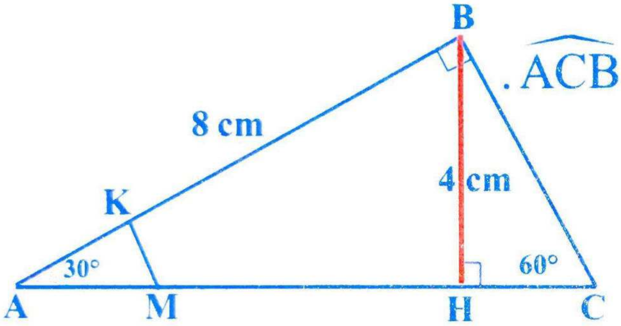
1) ارسم قطعة مستقيم [AB] حيث $AB = 12$.
عين النقطة M من القطعة [AB] حيث $AM = 1$.
ارسم نصف الدائرة ذات القطر [AB] ، و المستقيم (d) العمودي على (AB) في النقطة M .يتقاطعان في النقطة C.

2) ما هي طبيعة المثلث ABC؟

3) عبر بطريقتين عن جيب تمام الزاوية $\widehat{BAC}$ ، مستنتجا أن $AC = 2\sqrt{3}$

4) أعط قيس الزاوية $\widehat{BAC}$.

التمرين 10:



ABC مثلث قائم في B، [BH] ارتفاع.

يعطى: $AB=8$ cm، $BH = 4$ cm، $\widehat{ACB} = 60°$.

1) احسب طول القطعة [AH].

2) احسب طول القطعة [HC] ، بتقريب 0,1 بالزيادة.

3) لتكن M نقطة من [AC] حيث $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{4}$ ، المستقيم المار من النقطة M والموازي للمستقيم (BC) يقطع القطعة [AB] في النقطة K .
بين أن $AK = 2$ cm .

التمرين 11:

1) أنشئ دائرة (C_1) مركزها O ونصف قطرها 3 cm.
عين على (C_1) ، النقط A ، B ، D بحيث يكون:
$BD = 4$ cm و $\widehat{BDA} = 65°$
أنشئ النقطة E المتناظرة قطريا مع النقطة B .

2) أثبت أن المثلث BED قائم.

3) احسب جيب تمام الزاوية $\widehat{BED}$ ، مستنتجا قيس هذه الزاوية بالتدوير للوحدة.

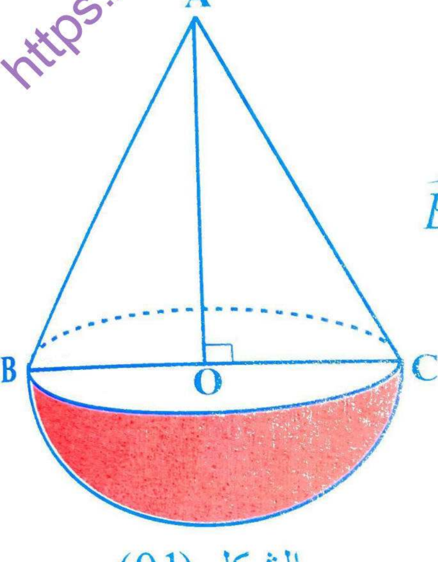
4) عين أقياس زوايا المثلث BOD .

التمرين 12:

وحدة الطول هي cm، لعبة على شكل نصف جلة فوقها مخروط دوران رأسه A ، كما هو موضح في الشكل (01).

القطعة [BC] قطر لقاعدة المخروط، النقطة O منتصف هذه القاعدة.

يعطى $AB = 7$ ، $BC = 6$.



الشكل (01)

1) أ) أنشئ المثلث القائم AOB بقياساته الحقيقية

ب) احسب القيمة المضبوطة للطول AO.

ج) احسب القيمة المضبوطة لجيب الزاوية $\widehat{BAO}$

استنتج قيسا للزاوية $\widehat{BAO}$

(معطيا النتيجة بالتدوير للوحدة).

2) احسب حجم اللعبة (المخروط ونصف الجلة مجتمعين، معطيا النتيجة بتقريب cm^3)

التمرين 13:

وحدة الطول هي cm .

1) ارسم ثلاثة نقط M ، B ، E على استقامة واحدة وبهذا الترتيب بحيث:

$MB = 9$ و $BE = 6$.

أنشئ الدائرة (C) ذات القطر[BE] ، نرمز بـ O لمركزها.

عين على الدائرة (C) النقطة A حيث $BA = 5$.

ارسم المستقيم الموازي لـ(AE) المار من النقطة M والذي يقطع المستقيم (AB) في النقطة D .

2) أحسب الطول BD .

3) أ) ما هي طبيعة المثلث ABE ؟ علل إجابتك.

ب) أحسب قيس الزاوية $\widehat{BEA}$.

4) عين قيس الزاوية $\widehat{BOA}$.

التمرين 14:

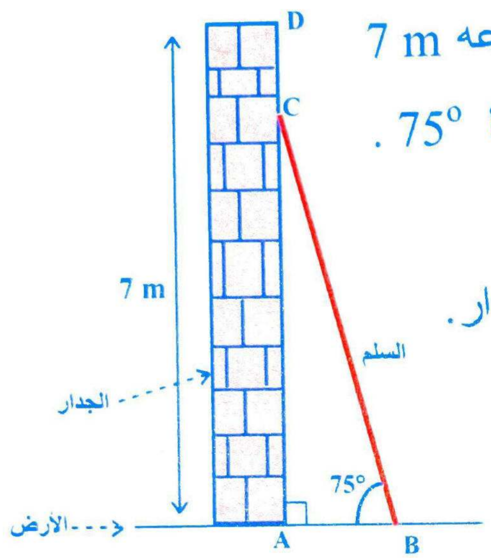
وحدة الطول هي cm.

ABC مثلث قائم في A بحيث $AB = 5$ ، $BC = 7,5$.

1) أحسب قيس الزاوية $\widehat{ACB}$ بالتدوير للوحدة.

2) لتكن M نقطة من المستقيم (AB) وخارج القطعة [AB] بحيث $AM = 2$.
المستقيم المار من M والموازي للمستقيم (BC) يقطع (AC) في نقطة D .
احسب MD .

التمرين 15:



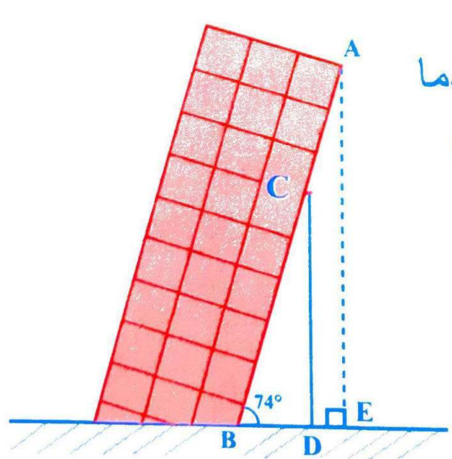
سلم طوله 6 m موضوع على جدار عمودي ارتفاعه 7 m
ولتكن الزاوية التي يحدثها السلم مع الأرض قيسها 75^o .
انظر الشكل المقابل.

أحسب المسافة AB بين قاعدة(رجل) السلم والجدار.

أحسب المسافة CD (بعد السلم عن قمة الجدار).

تعطى النتائج بالتدوير للوحدة

التمرين 16:



هل سمعت ببرج بيزا بإيطاليا؟

1) برج بيزا يميل عن الأرض بزاوية قيسها 74^o عندما تكون الشمس في وقت الزوال (الأشعة عمودية) يكون طول ظل البرج على الأرض هو 15 m .

أ) أحسب على أي ارتفاع من الأرض توجد النقطة A من البرج .

ب) أحسب المسافة AB .

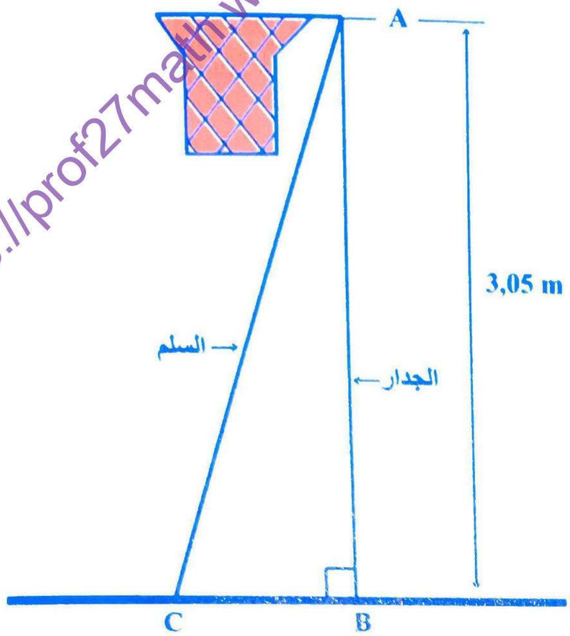
2) أحد السياح (في النقطة C) يكون قد صعد ثلثي سلم البرج يميل فتسقط من يده آلة التصوير عموديا.

أ) بين أن النقطة D نقطة ارتطام آلة التصوير بالأرض تقع على بعد 10 m من النقطة B.

ب) من أي ارتفاع وقعت آلة التصوير؟.

التمرين 17:

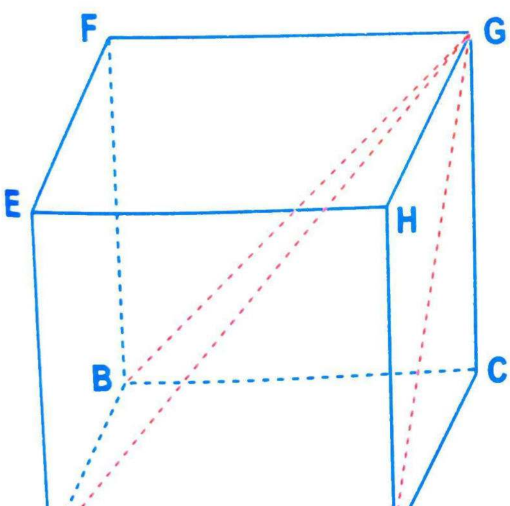
أراد المدير جعل مكان مخصص لممارسة لعبة كرة السلة، بملعب المتوسطة، فاشترى لوازمها وطلب من العمال تركيبها فثبتت السلة على ارتفاع 3,05 m من الأرض، السلم الذي يضبطها على الجدار طوله 3,20 m (كما هو موضح في الشكل المقابل).



أحسب المسافة CB بالتدوير للوحدة.

أحسب قيس الزاوية التي يميل بها السلم عن الأرض. (بالتدوير للوحدة).

التمرين 18:



ABCDEFGH مكعب قائم قاعدته مربع.

يعطى $CG = 4$ cm، $AD = 3$ cm.

1) أحسب بـ cm^3 حجم المخروط ذو الرأس G والقاعدة ABCD .

2) أحسب DG .

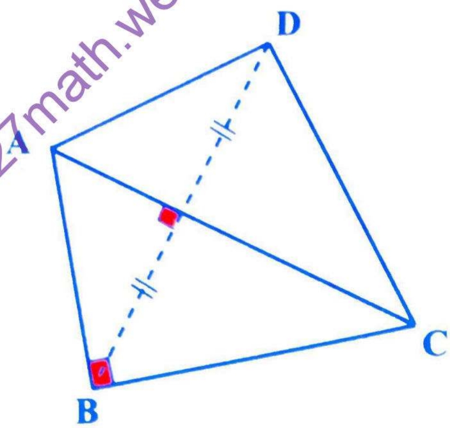
3) نقبل أن المثلث ADG قائم في D .

أ) أحسب قيس الزاوية $\widehat{AGD}$ (بالتدوير للوحدة).

ب) أحسب الطول AG ، معطيا قيمته التقريبية بالمليمتر(mm).

حلول تمارين حســاب المثلثــــات

التمرين01:



1) الضلع الأطول هو AC .

لدينا من جهة: $AC^2 = (11,5)^2 = 132,25$

ومن جهة أخرى:

$AB^2 + BC^2 = (6,9)^2 + (9,2)^2$

$AB^2 + BC^2 = 47,61 + 84,64 = 132,25$

ومنه: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ومنه: حسب النظرية العكسية لفيثاغورث فالمثلث ABC قائم في B

2) أ) حساب قيس الزاوية $\widehat{ACB}$: $\cos\widehat{ACB} = \frac{CB}{CA} = \frac{9,2}{11,5} \approx 0,8$.

ومنه ، وباستعمال الآلة الحاسبة نجد : $\widehat{ACB} \approx 36,8^o$.

وبالتالي: $\widehat{ACB} = 37^\circ$

ب) استنتاج قيس الزاوية $\widehat{BAC}$:

بما أن المثلث ABC قائم في B فإن الزاويتين $\widehat{ACB}$ و $\widehat{BAC}$

متتامتان، أي: $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 90^\circ$.

ومنه: $\widehat{BAC} \approx 90^o - 37^o \approx 53^o$.

وبالتالي: $\widehat{BAC} = 53^\circ$

3) حساب مساحة الرباعي $ABCD$:

لدينا D نظيرة B بالنسبة للمستقيم (AC)

ومنه المثلث ADC نظير المثلث ABC بالنسبة للمستقيم (AC)

إذن: مساحة المثلث ADC تساوي مساحة المثلث ABC

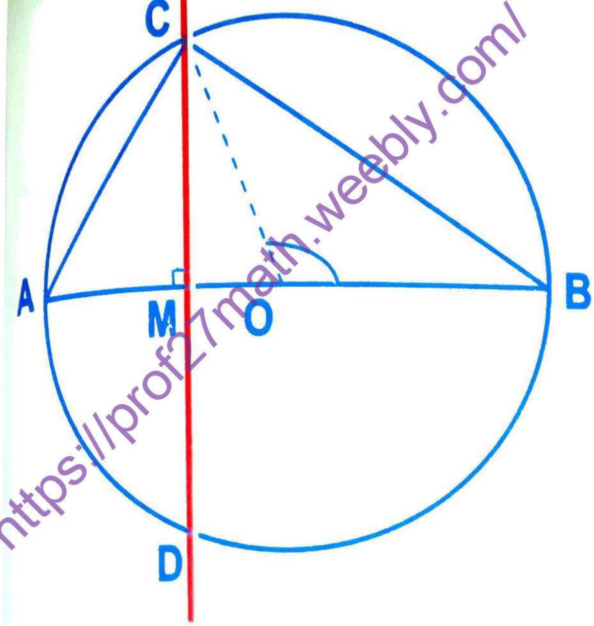
(لأن التناظر المحوري يحفظ المساحات).

وبالتالي: $A_{ABCD} = 2 \times A_{ABC}$ حيث:

(A_{ABCD} ، A_{ABC} هما مساحتي الرباعي والمثلث على الترتيب).

ومنه: $A_{ABCD} = 2 \times \frac{AB \times BC}{2} = 6,9 \times 9,2 = 63,48$.

ومنه: $A_{ABCD} = 63,48\ cm^2$.



التمرين 02:

1) أ) حساب طول القطعة $[OC]$:

$[OC]$ هو نصف قطر للدائرة، ومنه:

$OC = 5\text{ cm}$

ب) حساب قيس الزاوية $\widehat{MOC}$:

في المثلث OCM القائم في M لدينا:

$$\cos\widehat{MOC} = \frac{OM}{OC} = \frac{1,7}{5} = 0,34$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{MOC} \approx 70^\circ$.

ج) استنتاج قيس الزاوية $\widehat{BOC}$:

لدينا: $\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{MOC}$. ومنه: $\widehat{BOC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

2) لنبين أن قيس الزاوية $\widehat{MBC}$ هو 35°:

بما أن $[OB]$ و $[OC]$ نصفي قطرين في الدائرة فالمثلث OBC متساوي الساقين.

ومنه: $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$.

إذا: $\widehat{MBC} = \dfrac{180^\circ - 110^\circ}{2} \approx 35^\circ$. (لأن $\widehat{MBC} = \widehat{OBC}$)

3) القيمة المقربة للطول BC :

في المثلث MBC القائم في M لدينا : $\cos\widehat{MBC} = \dfrac{BM}{BC}$.

ومنه: $\cos 35^\circ = \dfrac{6,7}{BC}$ ، ومنه: $BC = \dfrac{6,7}{\cos 35^\circ} \approx 8,2\text{cm}$.

4) نوع المثلث ABC:

بما أن C نقطة من الدائرة ذات القطر $[AB]$ فالمثلث ABC قائم في C .

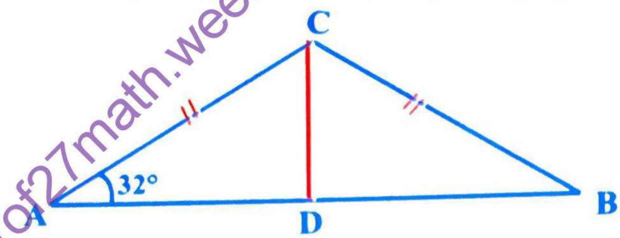
5) حساب القيمة المقربة بـ mm للطول AC:

المثلث ABC قائم في C ومنه: $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$.

ومنه: $\sin 35^\circ \approx \dfrac{AC}{10}$ ، ومنه: $AC \approx 10 \times \sin 35^\circ \approx 5,7\text{ cm}$

التمرين 03:

بما أن المثلث ABC متساوي الساقين فالارتفاع [CD] هو أيضا متوسط.



ومنه: النقطة D منتصف [AB].

إذن: $AD=\frac{1}{2}AB=\frac{7,2}{2}=3,6m$

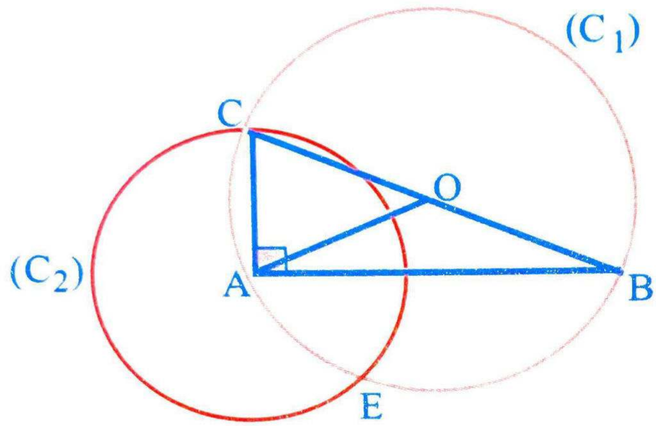
في المثلث ACD القائم في D لدينا:

$\tan\widehat{CAD}=\frac{CD}{AD}=\frac{CD}{3,6}$. ومنه: $CD=3,6\times\tan 32^o\approx 2,25\ cm$

التمرين 04:

1) حساب الطول AB:

ABC مثلث قائم في A.



ومنه وحسب نظرية فيثاغورث ينتج:

$$BC^2=AC^2+AB^2$$

$$AB^2=169-25=144 \ .$$

$$AB=\sqrt{144}=12\,cm$$

2) في المثلث ABC القائم في A لدينا:

$$\sin\widehat{ABC}=\frac{AC}{BC}=\frac{5}{13}\approx 0,38$$

ومنه، وباستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{ABC}\approx 22,6^o$ ، وبالتالي: $\widehat{ABC}\approx 23^o$.

3) الرسم (أنظر الشكل).

تحديد وضعية النقطة O:

نعلم أن مركز الدائرة المحيطة بمثلث قائم هو منتصف وتر هذا المثلث.

ومنه: O منتصف [BC].

4) حساب قيس الزاوية $\widehat{AOC}$:

الزاوية $\widehat{AOC}$ مركزية والزاوية $\widehat{ABC}$ محيطية تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AC}$.

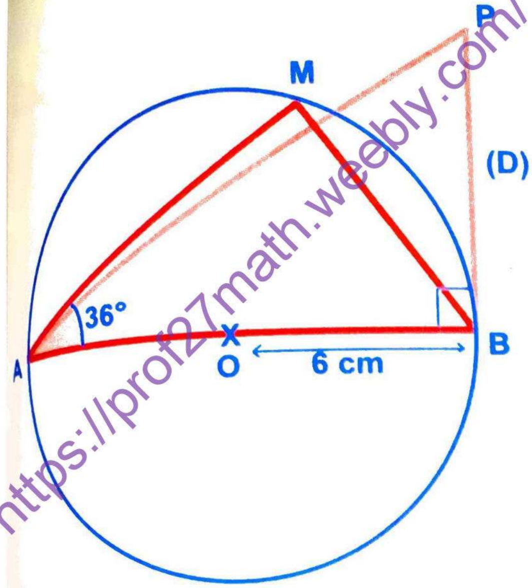
ومنه: $\widehat{AOC}=2\times\widehat{ABC}$ ، ومنه: $\widehat{AOC}\approx 2\times 23^o\approx 46^o$.

5) حساب قيس الزاوية $\widehat{AEC}$:

الزاوية $\widehat{AEC}$ محيطية والزاوية $\widehat{ABC}$ محيطية كذلك تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AC}$.

نعلم أن الزاويتان المحيطيتان التين تحصران نفس القوس متقايسين.

ومنه: $\widehat{AEC}=\widehat{ABC}\approx 23^o$.



التمرين 05 :

1) M نقطة من الدائرة ذات القطر [AB] ومنه فالمثلث ABM قائم في M.

2) حساب AM:

المثلث ABM قائم في M ومنه:

$$\cos\widehat{MAB} = \frac{AM}{AB} = \frac{AM}{12}$$

ومنه:

$$AM = 12 \times \cos\widehat{MAB}$$
$$= 12 \times \cos 36^\circ$$

ومنه: $AM \approx 9{,}7 \text{ cm}$.

3) نبين أن المثلث ABP قائم: المماس (D) عمودي على نصف القطر ومنه فالمثلث ABP قائم في B

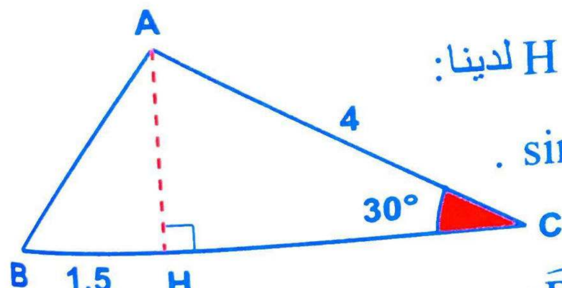
4) حساب PB:

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ABP القائم في B نجد: $AP^2 = AB^2 + BP^2$

ومنه: $BP^2 = AP^2 - AB^2 = 14^2 - 12^2 = 196 - 144 = 52$.

وبالتالي: $BP = \sqrt{52} \approx 7{,}2 \text{ cm}$

التمرين 06:



1) حساب AH: في المثلث AHC القائم في H لدينا:

$\sin\widehat{ACH} = \frac{AH}{AC}$. ومنه: $\sin 30^\circ = \frac{AH}{4}$.

ومنه: $AH = 4\sin 30^\circ = 2 \text{ cm}$.

2) استنتاج القيمة التقريبية لقيس الزاوية $\widehat{BAH}$:

في المثلث BHA القائم في H لدينا: $\tan\widehat{BAH} = \frac{BH}{AH} = \frac{1,5}{2} = 0,75$

ومنه، وباستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{BAH} \approx 36{,}8^\circ$. ومنه: $\widehat{BAH} \approx 37^\circ$.

3) لدينا من المعطيات: المثلث AHC قائم في H و $\widehat{ACH} = 30^\circ$.

ومنه: $\widehat{CAH} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

إذا: $\widehat{BAC} = \widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 37^\circ + 60^\circ = 97^\circ$.

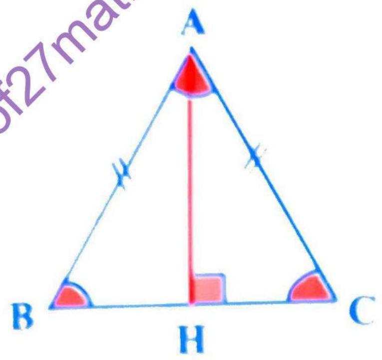
نعلم أن: الزاويتين الحادتين في مثلث قائم متتامتان.

لكن: $37^\circ + 60^\circ > 90^\circ$ ، ومنه فالمثلث ABC غير قائم.

التمرين 07:

1) * حساب BH:

بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن الارتفاع [AH] هو أيضا متوسط لهذا المثلث



ومنه: H منتصف [BC] ، وبالتالي $BH = \frac{1}{2}$.

* لنحسب AH:

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم BHA

نجد: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

ومنه: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. وبالتالي: $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) قيس الزاوية $\widehat{ABH}$ هو 60° (لأن المثلث ABC متقايس الأضلاع).

المثلث ABH قائم في H، ومنه: $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ$.

ومنه: $\widehat{BAH} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

لنحسب $\sin\widehat{ABH}$: نعلم أن: $\sin\widehat{ABH} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$.

ومنه: $\sin\widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. وبالتالي: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

لنحسب $\cos\widehat{ABH}$:

نعلم أن: $\cos\widehat{ABH} = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$.

ومنه: $\cos\widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$. وبالتالي: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

لنحسب $\sin\widehat{BAH}$:

$\sin\widehat{BAH} = \frac{BH}{BA} = \left(\frac{1}{2}\right) \div 1 = \frac{1}{2}$. ومنه: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

لنحسب $\cos\widehat{BAH}$:

$\cos\widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ومنه : $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ملاحظة:
يمكن الحصول على sin BAH و cos BAH بمعرفة: sin ABH و cos ABH
وذلك بالاعتماد على الخاصية:
في مثلث قائم جيب إحدى الزاويتين المتتامتين يساوي جيب تمام الزاوية الأخرى.
أي: sin BAH= cos BAH و cos BAH= sin BAH
معناه: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ و $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

3) استنتاج $\tan\widehat{ABH}$ و $\tan\widehat{BAH}$:

نعلم أن: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (α زاوية حادة).

مما سبق نستنتج:

$\tan\widehat{ABH} = \dfrac{AH}{BH} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{2}{1} = \sqrt{3}$ ومنه: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

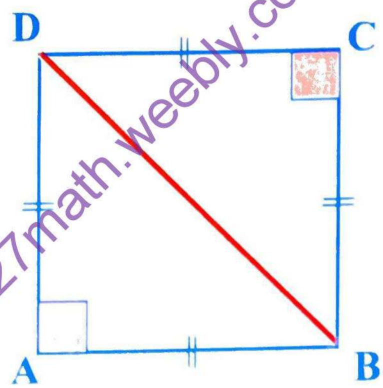
$\tan\widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AH} = \left(\dfrac{1}{2}\right) \div \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه: $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

نتيجـة

نتائج هذا التمرين نلخصها في الجدول المقابل:

الزاوية	30°	60°
sin	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
tan	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$

التمرين 08:



1) حساب BD:

[BD] وتر في المثلث القائم ABD، بتطبيق نظرية فيثاغورث نجد:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 1+1 = 2$.

ومنه: $BD = \sqrt{2}$

2) حساب قيس الزاوية $\widehat{ABD}$:

في المثلث القائم ABD لدينا: $\widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 90°$

لكن: $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$ (لأن المثلث ABD متساوي الساقين)

ومنه: $2 \times \widehat{ADB} = 90°$ ، ومنه: $\widehat{ABD} = \frac{90°}{2} = 45°$.

3) حساب sin و cos الزاوية $\widehat{ABD}$: في المثلث القائم ABD لدينا:

$$\sin \widehat{ABD} = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

لكن: $\widehat{ABD} = 45°$ ، ومنه: $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) استنتاج $\tan 45°$:

نعلم أن: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ (α زاوية حادة)، ومن الأسئلة السابقة نستنتج:

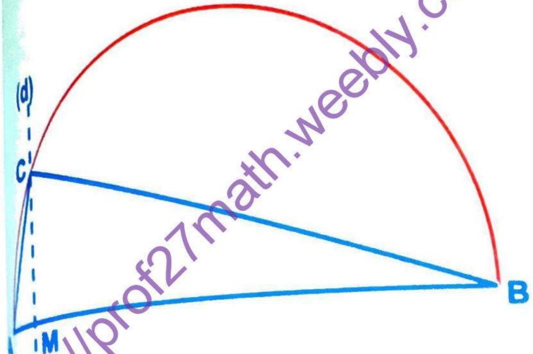
$\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} \div \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ ، إذن $\tan 45° = 1$

نتيجة 02: نلخص نتائج التمرينين السابقين في الجدول التالي:

الزاوية	$30°$	$45°$	$60°$
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

التمرين 09:

1) انظر الشكل المقابل:



2) المثلث ABC محاط بنصف الدائرة، فيه الضلع [AB] قطرا لها

ومنه فالمثلث ABC قائم في C

من جهة، في المثلث القائم ABC لدينا:

$\cos\widehat{BAC} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{12}$...(1).

ومن جهة أخرى، المثلث AMC قائم في M فيكون

$\cos\widehat{MAC} = \cos\widehat{BAC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{AC}$...(2).

من (1) و (2) نستنتج: $\frac{AC}{12} = \frac{1}{AC}$ ، ومنه: $AC \times AC = 12 \times 1$.

ومنه: $AC^2 = 12$ وبالتالي $AC = 2\sqrt{3}$.

3) حساب قيس الزاوية $\widehat{BAC}$:

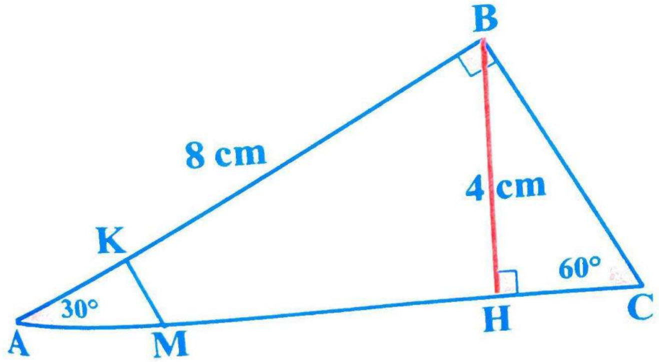
من السؤال السابق نستنتج أن : $\cos\widehat{BAC} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

ومنه، وباستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{BAC} \approx 73^\circ$.

التمرين 10:

1) حساب طول القطعة [AH]:

المثلث AHB قائم في H.



حسب نظرية فيثاغورث يكون لدينا:

$AB^2 = AH^2 + BH^2$

ومنه: $AH^2 = AB^2 - BH^2$.

ومنه: $AH^2 = 64 - 16 = 48$.

ومنه: $AH = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9$ cm

2) حساب طول القطعة [HC]:

في المثلث القائم HBC لدينا: $\tan\widehat{BCH} = \frac{BH}{CH}$ ومنه: $\tan\ 60^\circ = \frac{4}{CH}$

ومنه: $CH = \frac{4}{\tan\ 60^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}3$ cm

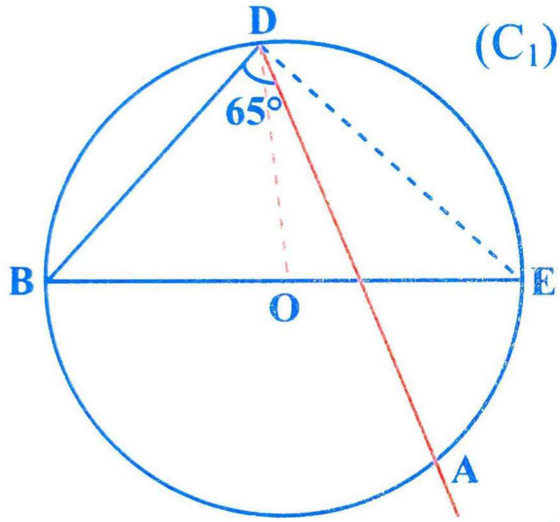
3) النقط A ، K ، B على استقامة واحدة ، كذلك النقط A ، M ، C على استقامة واحدة.

4) المستقيمين (BC) و (KM) متوازيين (بالفرض).

حسب نظرية طالس يكون لدينا: $\frac{AM}{AC} = \frac{AK}{AB}$ ، لكن $\frac{1}{4} = \frac{AM}{AC}$

ومنه: $\frac{AK}{AB} = \frac{1}{4}$ ، ومنه: $AK = \frac{1}{4} \times AB = \frac{1}{4} \times 8 = 2 \text{ cm}$.

التمرين 11:



1) انظر الشكل المقابل.

2) أحد أضلاع المثلث BED قطرا للدائرة (C_1) والرأس الثالثة لهذا المثلث تنتمي إلى الدائرة فالمثلث BED قائم في D .

3) في المثلث BDE ، لدينا:

$$\sin \widehat{BED} = \frac{BD}{BE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{BED} \approx 42°$

4) تعيين أقياس زوايا المثلث BOD:

الزاوية $\widehat{BOD}$ زاوية مركزية، والزاوية $\widehat{BED}$ محيطية تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{BD}$.

إذن: $\widehat{BOD} = 2 \times \widehat{BED} = 84°$.

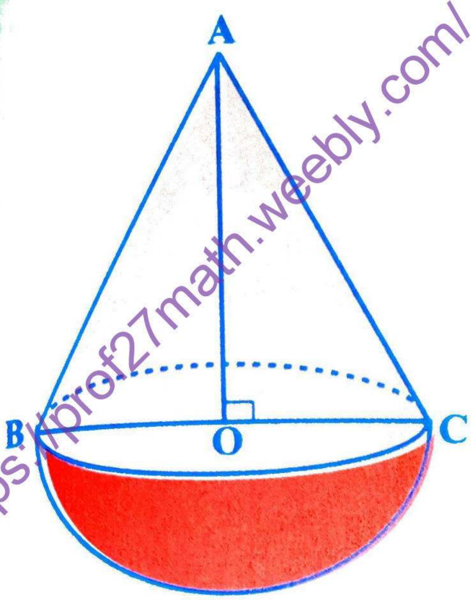
المثلث BOD متساوي الساقين (لأن OB و OD نصفي قطرين في الدائرة)

أي: $OB = OD$ ومنه: $\widehat{ODB} = \widehat{OBD}$

إذن: $\widehat{ODB} = \widehat{OBD} = \frac{1}{2}\left(180° - 84°\right) = 48°$

التمرين 12:

1) أ) انظر الشكل (01)



الشكل (01)

ب) المثلث AOB قائم في O، والنقطة O هي منتصف [BC] القطعة إذن:

$$AO^2 = BA^2 - BO^2 = 7^2 - 3^2 = 40$$

$$AO = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\,\text{cm}$$

لدينا: $\sin\widehat{BAO} = \frac{BO}{BA} = \frac{3}{7} \approx 0,43$

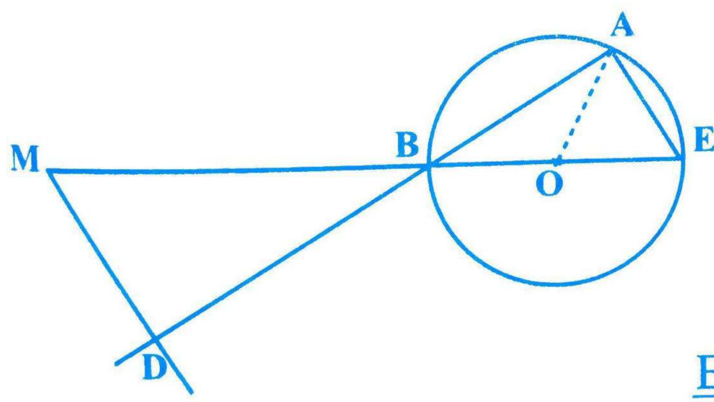
باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{BAO} \approx 25^\circ$

2) حساب حجم اللعبة:

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi\, 3^3\right) + \frac{\pi \times 3^2 \times \sqrt{40}}{3} \approx 116$$

ومنه حجم اللعبة هو $116\ \text{cm}^3$.

التمرين 13:



1) انظر الشكل المقابل:

ملاحظة: الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية.

حسب نظرية طالس يكون لدينا :

2) $\frac{BD}{BA} = \frac{BM}{BE}$ ومنه: $\frac{BD}{5} = \frac{9}{6}$

إذن : $BD = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7,\ 5\ \text{cm}$

3) أ) المثلث ABE قائم في A لأنه محاط بنصف الدائرة ذات القطر [BE].

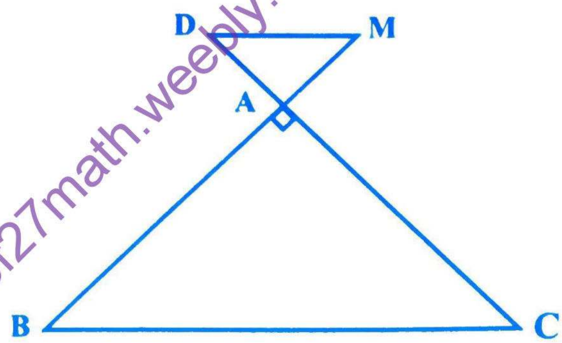
ب) لدينا: $\sin\widehat{BEA} = \frac{AB}{BE} = \frac{5}{6}$.

باستعمال الآلة الحاسبة نحصل على: $\widehat{BEA} \approx 56^\circ$ (بتقريب درجة).

4) الزاوية $\widehat{BOA}$ زاوية مركزية، والزاوية $\widehat{BEA}$ محيطية (مرتبطة بها) تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{BA}$، إذن: $\widehat{BOA} = 2 \times \widehat{BEA}$.

وبالتالي: $\widehat{BOA} = 2 \times 56^\circ = 112^\circ$.

التمرين 14:



1) المثلث ABC قائم في A إذن:

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد:

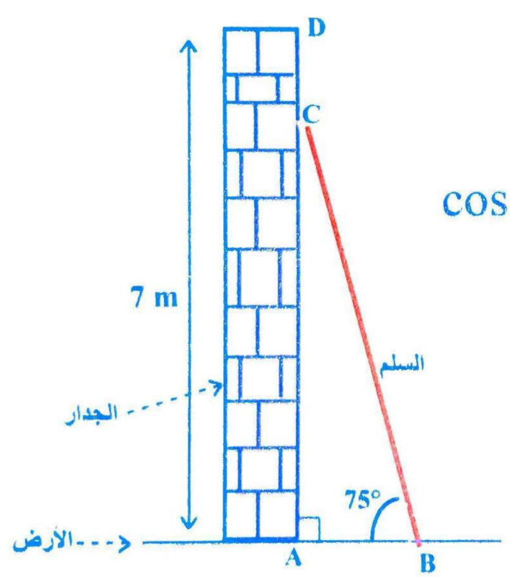
$$\widehat{ACB} \approx 42^\circ$$

في المثلثين ABC و AMD وحسب نظرية طالس يكون لدينا: $\frac{AM}{AB} = \frac{MD}{BC}$

ومنه: $MD = BC \times \frac{AM}{AB} = 7,5 \times \frac{2}{5} = 3$

ومنه: $MD = 3\ cm$.

التمرين 15:



1) في المثلث ABC القائم في A لدينا:

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \widehat{ABC}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{6}.$$

ومنه: $\cos 75^\circ = \frac{AB}{6}$

$$AB = 6 \times \cos 75^\circ \approx 1,55m$$

2) في المثلث ABC القائم في A لدينا:

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \widehat{ABC}}{\text{طول الوتر}}.$$

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{6}،$$

ومنه: $\sin 75^\circ = \frac{AC}{6}$

ومنه: $AC = 6 \times \sin 75^\circ \approx 5,80m$

لكن: $CD = AD - AC$.

إذن: $CD \approx 7 - 5,80 \approx 1,20m$

ملاحظة:
باستعمال الآلة الحاسبة نجد:

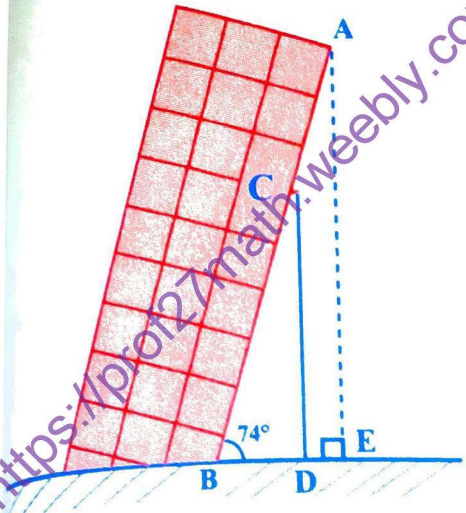
$\cos 75^\circ \approx 0,258$

$\sin 75^\circ \approx 0,966$

التمرين 16:

1) أ) لتكن E نقطة انتهاء ظل البرج.

بما أن أشعة الشمس عمودية والأرض أفقية فإن المثلث ABE قائم في E .



ومنه :

$$\tan \widehat{EBA} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \widehat{EBA}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \widehat{EBA}}$$

$\tan \widehat{EBA} = \frac{AE}{BE}$ ، ومنه : $\tan 74° = \frac{AE}{15}$

ومنه: $AE = 15 \times (\tan 74°) \approx 52m$.

ب) المثلث ABE قائم في E ، ومنه:

$$\frac{BE}{BA} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \widehat{EBA}}{\text{طول الوتر}} = \cos \widehat{EBA}$$ ومنه: $\cos 74° = \frac{BE}{BA}$

$BA \times \cos 74° = 15$ ، ومنه: $BA = \frac{15}{\cos 74°} \approx 54 \text{ m}$

2) بما أن:

ا) المستقيمين (AE) ، (CD) متوازيين

النقط B ، C ، A بهذا الترتيب على استقامة واحدة.

النقط B ، D ، E بهذا الترتيب على استقامة واحدة.

وبذلك نستطيع تطبيق نظرية طالس على المثلثين BCD و BAE .

$\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{AE}$ ، ومنه : $\frac{2}{3} = \frac{BD}{15} = \frac{CD}{AE}$

ومنه: $\frac{2}{3} = \frac{BD}{15}$ ومنه: $3 \times BD = 2 \times 15$.

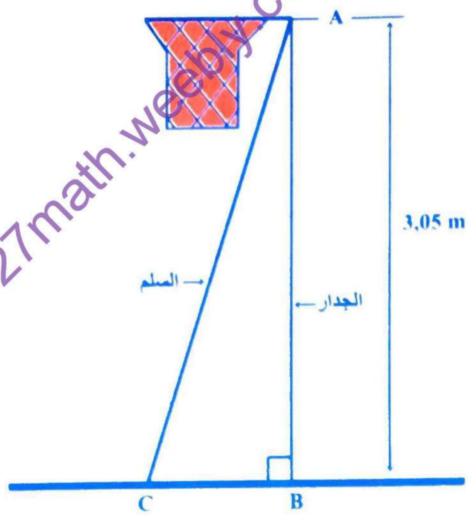
وبالتالي: $BD = \frac{30}{3} = 10 \text{ m}$.

ب) لدينا أيضا: $\frac{2}{3} = \frac{CD}{AE}$، ومنه:

$CD = \frac{2 \times AE}{3} \approx \frac{2 \times 52}{3} \approx 35 \text{ m}$.

إذن آلة التصوير وقعت من ارتفاع 35 m.

التمرين 17:



1) المثلث ABC قائم في B ، حسب نظرية فيثاغورث نجد: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

ومنه: $(3,2)^2 = (3,05)^2 + BC^2$.

ومنه: $BC^2 = (3,20)^2 - (3,05)^2 = 0,9375$

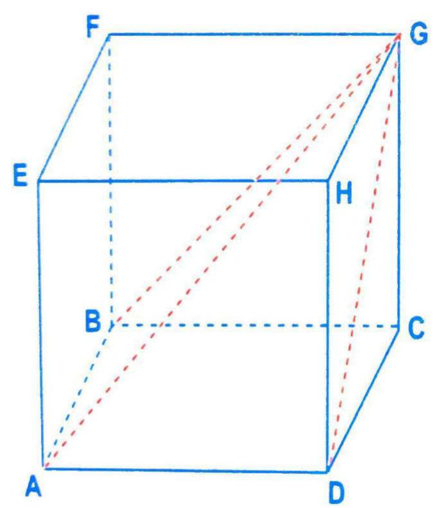
إذن: $BC = \sqrt{0,9375} \approx 0,97\ m$.

2) في المثلث ABC قائم في B، الزاوية التي يميل بها السلم عن الأرض هي $\widehat{C}$.

نعلم أن: $\sin \widehat{C} = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \widehat{C}}{\text{طول الوتر}}$

ومنه: $\sin \widehat{C} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3,05}{3,20} \approx 0,953$ باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{C} = 72^\circ$.

التمرين 18:



حجم مخروط دوراني ارتفاعه L ومساحة قاعدته B هو:
$V = \dfrac{1}{3} X\ L\ X\ B$

1) حساب حجم المخروط:

$$V = \frac{1}{3} \times L \times B = \frac{1}{3} \times 4 \times (3 \times 3) = 12\ cm^3$$

2) حساب الطول DG:

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم DCG

نجد: $DG^2 = DC^2 + CG^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

ومنه: $DG = \sqrt{25} = 5\ cm$

3) أ) حساب قيس الزاوية $\widehat{AGD}$:

نعلم أن: $\tan \widehat{AGD} = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \widehat{AGD}}{\text{طول الضلع المجاور}}$

ومنه: $\tan \widehat{AGD} = \dfrac{AD}{AG} = \dfrac{3}{5} = 0,6$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\widehat{AGD} \approx 31^\circ$

ب) حساب الطول AG:

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم ADG نجد:

$DG^2 = AD^2 + DG^2 = 3^2 + 5^2 = 34$ ومنه: $AG = \sqrt{34} \approx 5,8\,cm$