تمـــارين الأشعـــة والإنسحـاب

التمرين 01: في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، وحدة الطول هي السنتمتر.
انجاز الشكل يكون على مرصوفة.

1) أ) علم النقط $A(4\,;5)$ ، $B(-3\,;3)$ ، $C(2\,;-2)$.
ب) ما نوع المثلث ABC؟

2) لتكن D صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.
احسب إحداثيات النقطة D .

3) ما نوع الرباعي ABDC ؟

التمرين 02: في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، وحدة الطول هي السنتمتر.
نعطي النقط $A\,(1\,;-3)$, $B\,(-3\,;5)$, $C\,(3\,;3)$.

1) علم النقط A ، B ، C .

2) احسب الأطوال AB ، AC ، BC .
بين أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين (علل إجابتك) .

3) بين أن $(-1;1)$ هما إحداثيا النقطة M منتصف القطعة [AB].
احسب إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{CM}$.

4) أنشئ النقطة D حيث $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CM}$، مبينا أن النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى M.
ما نوع الرباعي ADBC ؟

5) أنشئ النقط A', B', D' نظائر النقط D,B,A (على الترتيب) بالنسبة إلى C.
ما نوع الرباعي A'D'B'C ؟

التمرين 03: في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، وحدة الطول هي السنتمتر.

1) علم النقط $A(2\,;1)$ ، $B\,(5\,;5)$ ، $C\,(6\,;2)$.

2) احسب إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

3) احسب المسافة AB .

4) ارسم النقطة D بحيث يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع .
أعط إحداثيات النقطة D .
احسب إحداثيات النقطة M مركز تناظر متوازي الأضلاع ABCD .

التمرين 04: في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، وحدة الطول هي السنتمتر.

1) علم النقط $A(2\,;6)$ ، $B(-4\,;2)$ ، $C(-2\,;-1)$ ، $D(4\,;3)$.

2) احسب إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$.

هل الرباعي ABCD متوازي أضلاع ؟ ، علل إجابتك .

3) احسب بدقة المسافتين AC و BD .

بين أن ABCD مستطيل

التمرين 05:

1) ليكن المثلث ABC ، ولتكن M نقطة لا تنتمي إلى المثلث.

أ) أنشئ النقطة K بحيث يكون $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{BA}$.

ب) أنشئ النقطة P بحيث يكون $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.

2) بين أن: $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{AC}$.

التمرين 06:

1) أنشئ المعين ABCD ،أنشئ النقطة E صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$

والنقطة F صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

2) بين أن النقطة C هي منتصف القطعة [DE] .

3) ما نوع الرباعي BDFE ؟.

التمرين 07: في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، وحدة الطول هي السنتمتر.

علم النقطتين $A(-5\,;1)$, $B(1\,;5)$.

1) أ) احسب إحداثيات الأشعة $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OA}$.أثبت أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين

ب) لتكن (C) الدائرة المحيطة بالمثلث AOB، أحسب نصف قطرها و إحداثيات مركزها

2) مثل النقطة E صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$، ماهي طبيعة الرباعي AEBO؟

التمرين 08: في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، وحدة الطول هي السنتمتر.

1) علم النقطتين $A(-1\,;3)$ ، $B(3\,;2)$.

2) مثل النقطة G صورة المبدأ O بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

3) احسب المسافة AB .

مثل النقطة H بحيث يكون $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$، C هي النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.

التمرين 09:

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، ووحدة الطول هي السنتمتر.

1) أ) علم النقط $A(4\,;-5)$ ، $B(-6\,;0)$ ، $C(-2\,;3)$.

ب) احسب الأطوال AB ، AC ، BC.

ج) استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية .

2) أ) أنشئ النقطة D صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CA}$.

ب) ما هي طبيعة الرباعي $ACBD$ ؟ علل إجابتك .

ج) احسب إحداثيي النقطة D .

د) احسب إحداثيي مركز الرباعي $ACBD$.

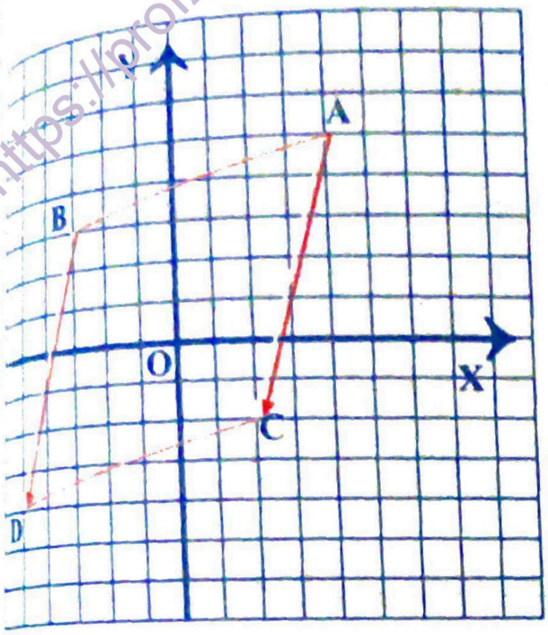
3) أ) أنشئ النقطة E نظيرة B بالنسبة إلى C.

ب) احسب إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{BA}$

ج) أنشئ النقطة F حتى يكون $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DA}$ (لا يطلب أي شرح).

حلول تمارين الأشعة والإنسحاب

التمرين01:



1) أ) الشكل المقابل.

ب) باستعمال العلاقة

$AB=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$ نحسب:

AB ، AC ، BC

$$AB=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$$

$$AB=\sqrt{(-7)^2+(-2)^2}$$

$$AB=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$$

وبنفس الطريقة نجد:

$AC=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$ ، $BC=\sqrt{50}=2\sqrt{5}$

لدينا $AB=AC=\sqrt{53}$ ومنه فالمثلث ABC متساوي الساقين.

2) حساب إحداثيات النقطة D :

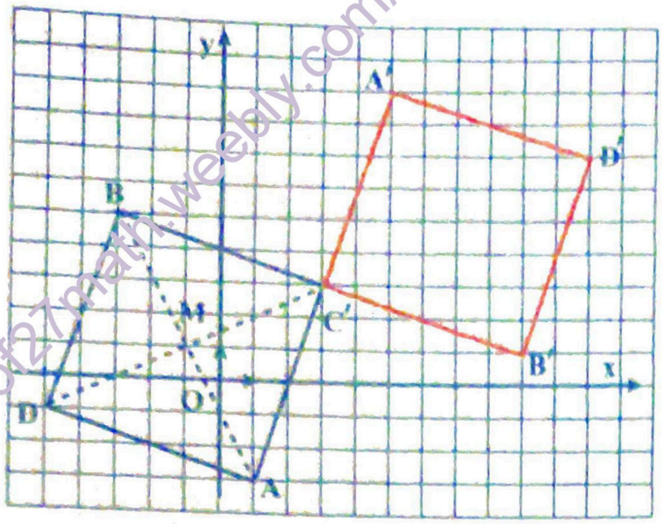
لدينا $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ ومنه:

$\begin{cases} x_C-x_A=x_D-x_B \\ y_C-y_A=y_D-y_B \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 2-4=x_D-(-3) \\ -2-5=y_D-3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x_D=-2-3=-5 \\ y_D=-7+3=-4 \end{cases}$

ومنه إحداثيا النقطة D هما $(-5;-4)$.

لدينا $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ ، إذن فالرباعي ABDC متوازي أضلاع.

لدينا كذلك $AB=AC$ حسب السؤال 1) ب)، فمتوازي الأضلاع ABDC فيه ضلعين متتاليين متقايسين، إذن ABDC معين.



التمرين 02:

1) انظر الشكل المقابل.

2) حساب الأطوال AB ، AC ، BC:

لدينا: $AC=\sqrt{(x_C-x_a)^2+(y_C-y_a)^2}$

ومنه: $=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

نجد أيضا: $BC=2\sqrt{10}$

$AB=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{16+64}=4\sqrt{5}$

نبين أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين :

بما أن $AC=BC$ ، فالمثلث ABC متساوي الساقين.

لدينا: $AB^2=(4\sqrt{5})^2=16\times5=80$

$AC^2+BC^2=(\sqrt{40})^2+(\sqrt{40})^2=40+40=80$ ومنه: $AB^2=AC^2+BC^2$

إذن حسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورث المثلث ABC قائم في C.

وبالتالي فالمثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية.

3) إحداثيا النقطة M: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ ومنه: $M\left(\frac{1-3}{2};\frac{-3+5}{2}\right)$

ومنه: $M(-1;1)$

إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{CM}$: $(-1-3;1-3)$، ومنه: $\overrightarrow{CM}(-4;-2)$.

4) نوع الرباعي ADBC:

بما أن $MD=CM$ فإن M منتصف القطعة [CD] ومنه C نظيرة D بالنسبة إلى M.

إذن للقطعتين [AB] و [CD] نفس المنتصف M ومنه الرباعي ADBC متوازي أضلاع .

الزاوية $\widehat{BCA}$ قائمة (لأن المثلث ABC قائم في C).

$CB=CA$ (لأن المثلث ABC متساوي الساقين) .

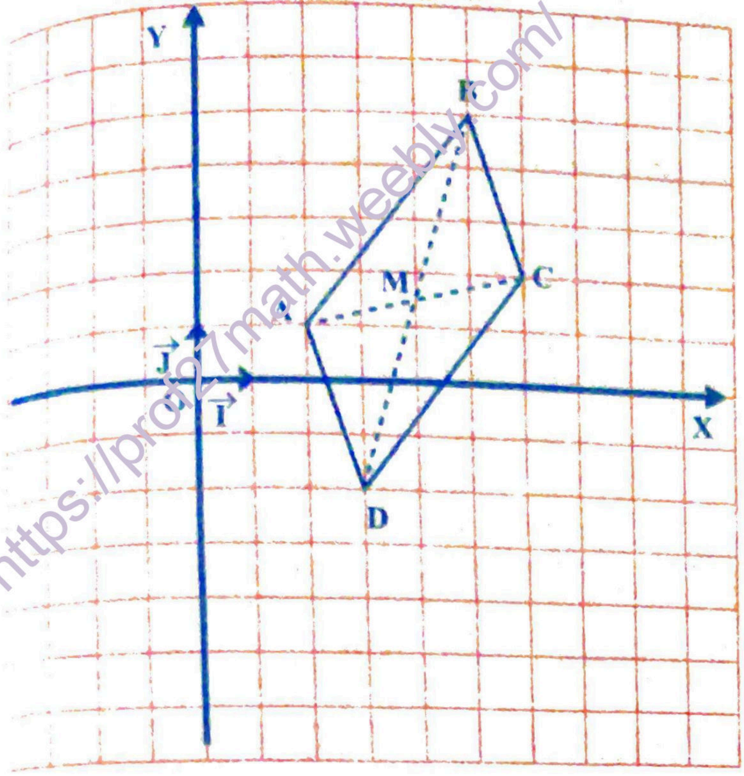
ومنه فالرباعي ADBC مربع.

5) أنشئ النقط A' , B' , D' نظائر النقط A , B , D (على الترتيب) بالنسبة إلى C:

أنظر الشكل السابق

الرباعي A'D'B'C هو صورة الرباعي ADBC بالتناظر المركزي بالنسبة للنقطة C.

نستنتج أن A'D'B'C مربع لأن ADBC مربع (التناظر المركزي يحفظ المسافات ويحفظ أقياس الزوايا)



التمرين 03:

1) تعليم النقط:

2) حساب إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{cases} x_B - x_A = 5 - 2 = 3 \\ y_B - y_A = 5 - 1 = 4 \end{cases}$$

ومنه: $\overrightarrow{AB}(3;4)$.

3) حساب المسافة AB :

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

ومنه:

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$AB = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5cm$$

4) تعيين النقطة D:

D هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$

إحداثيا النقطة D:

لدينا $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ومنه: $\begin{cases} x_C - x_D = x_B - x_A \\ y_C - y_D = y_B - y_A \end{cases}$

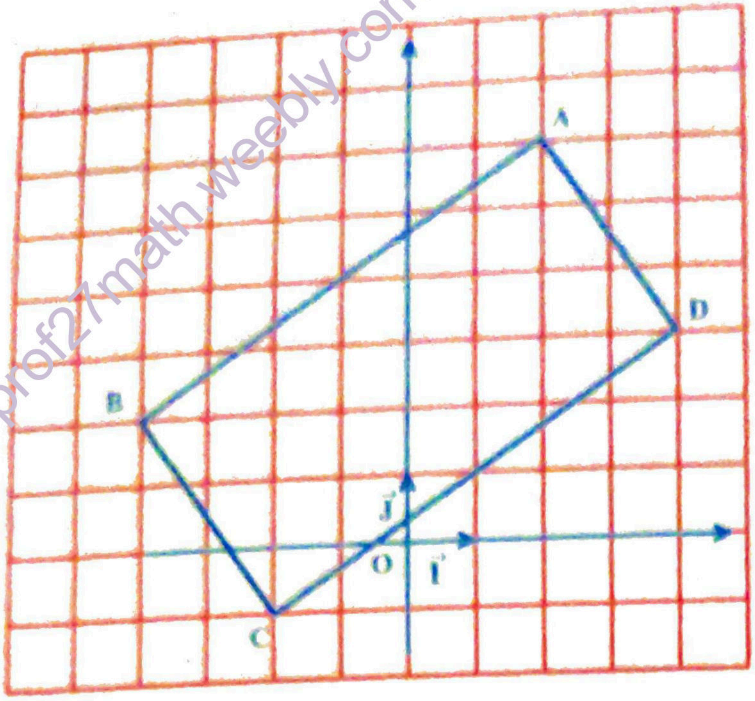
ومنه: $\begin{cases} x_D = 6 - 5 + 2 = 3 \\ y_D = 2 - 5 + 1 = -2 \end{cases}$ إذن $D(3\ ;\ -2)$

5) إحداثيات النقطة M:

النقطةM مركز تناظرمتوازي الأضلاعABCD فهي منتصف قطريه،أي M منتصف[AC]

$M\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$ ومنه: $M\left(4;\frac{3}{2}\right)$

التمرين 04:



1) أنظر الشكل المقابل.

2) حساب إحداثيا الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$:

$$\begin{cases} x_B - x_A = -4 - 2 = -6 \\ y_B - y_A = 2 - 6 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C - x_D = -2 - 4 = -6 \\ y_C - y_D = -1 - 3 = -4 \end{cases}$$

ومنه: $\overrightarrow{AB}(-6;-4)$ و $\overrightarrow{DC}(-6;-4)$

بما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فالرباعي ABCD متوازي أضلاع

3) $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$$AC = \sqrt{(2-(-2))^2 + (6-(-1))^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

ومنه: $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$

$$BD = \sqrt{(4-(-4))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$$

ومنه: $AC = BD$.

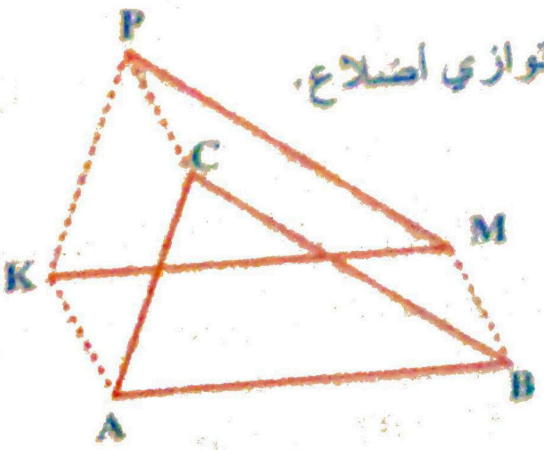
متوازي الأضلاع ABCD فيه القطران [AC] و [BD] متقايسان، إذن ABCD **مستطيل**.

التمرين 05:

1) أ)، ب) أنظر الشكل المقابل.

2) بما أن: $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{BA}$ فإن الرباعي MKAB متوازي أضلاع.

ومنه: $\overline{MB} = \overline{KA}$ ...(1)



بما أن: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$ فإن الرباعي PCBM متوازي أضلاع.

ومنه: $\overline{MB} = \overline{PC}$ ...(2)

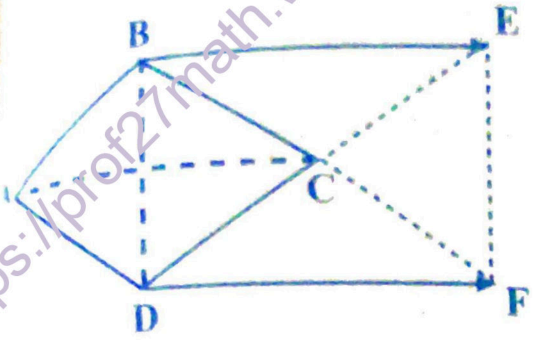
من (1) ، (2) نستنتج أن $\overline{KA} = \overline{PC}$

وبالتالي الرباعي PCAK متوازي أضلاع.

إذن: $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{AC}$

التمرين 06:

1) انظر الشكل المقابل.



2) لدينا: E صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$

ومنه: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.

فالرباعي ABEC متوازي أضلاع

إذن: $AB = CE ...(1)$

لدينا ABCD معين (من المعطيات)

ومنه: $AB = DC ...(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن: $CE = DC ...(3)$

لدينا: $(CE)//(AB)$ و $(DC)//(AB)$ وذلك من المعطيات.

ومنه: $(DC)//(CE)$ وبالتالي النقط D , C , E على استقامة واحدة ......(4).

من (3) و (4) نستنتج أن النقطة C هي منتصف القطعة [DE].

3) نوع الرباعي BDFE:

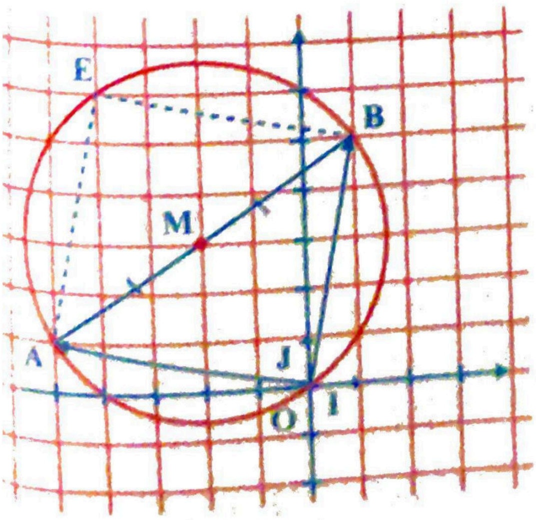
4) لدينا من المعطيات: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$ ومنه: $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$

5) فالرباعي BDFE متوازي أضلاع .

6) وبما أن $(AC) \perp (BD)$ و $(AC)//(BE)$ فإن: $(BE) \perp (BD)$

7) إذن: فالرباعي BDFE مستطيل .

التمرين 07:



تعليم النقطتين $A(-5;1)$, $B(1;5)$

(أنظر الشكل المقابل)

1) أ) حساب إحداثيات الأشعة $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OA}$:

$\overrightarrow{OA}(-5;1)$, $\overrightarrow{OB}(1;5)$, $\overrightarrow{AB}(6;4)$

إثبات أن المثلث AOB قائم ومتساوي الساقين:

لنحسب: AB , OB , OA

$$OA = \sqrt{(-5-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{26}$$

$$OB = \sqrt{(1-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{26}$$

$$AB=\sqrt{(1-(-5))^2+(5-1)^2}=\sqrt{52}$$

$OA=OB$ فالمثلث OAB متساوي الساقين.

لدينا من جهة: $OA^2+OB^2=26+26=52$

ومن جهة أخرى: $AB^2=\left(\sqrt{52}\right)^2=52$

ومنه، وحسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورث فالمثلث OAB قائم في O.

إذن مما سبق نستنتج أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

ب) (C) الدائرة المحيطة بالمثلث AOB ، لتكن M مركزها و R نصف قطرها.

بما أن المثلث OAB قائم فإن $M(x_M\,;\,y_M)$ هي منتصف الوتر $[AB]$ و

$$R=\frac{1}{2}AB$$

ومنه: $\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-5+1}{2}=-2 \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1+5}{2}=3 \end{cases}$ ، ومنه: $M(-2\,;\,3)$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{52}}{2}=\frac{\sqrt{4\times13}}{2}=\frac{2\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$$

2) النقطة E صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$ معناه $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OB}$.

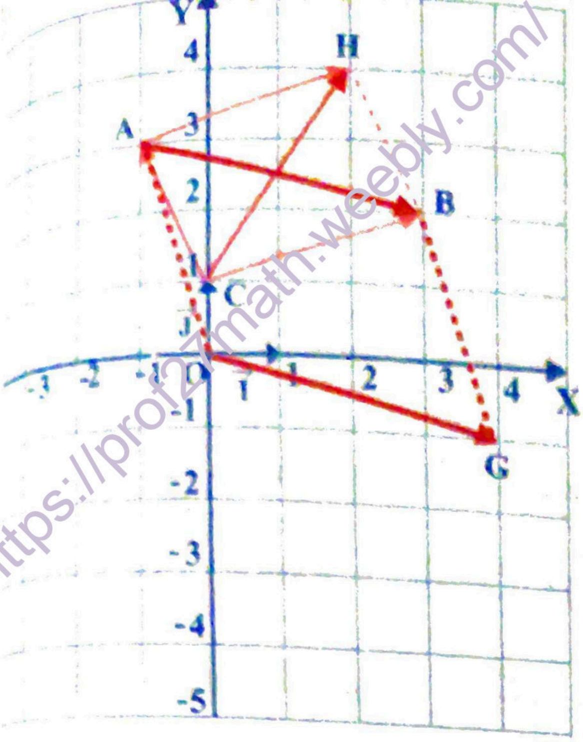
3) تمثيل النقطة E (أنظر الشكل السابق).

بما أن النقطة E صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$ فالرباعي AEBO متوازي أضلاع.

ومنه ينتج: $OA=BE$ و $OB=AE$

لكن $OA=OB$ (من السؤال 1) ۱))، إذن: $OA=AE=EB=OB$

بالإضافة إلى ذلك الزاوية $\widehat{AOB}=90^\circ$ (لأن المثلث OAB قائم في O) إذن AEBO مربع.



التمرين 08:

1) تعليم النقطتين $A(-1\,;3)$ ، $B(3\,;2)$.

(أنظر الشكل المقابل)

2) النقطة G صورة المبدأ O بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ معناه: (1)... $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AB}$.

لتمثيل النقطة G:

إما بمعرفة إحداثيتيها من المساواة (1)، فنجد $G(4\,;-2)$.

أو النقطة G هي الراس الرابعة لمتوازي الأضلاع BAOG .(أنظر الشكل المقابل).

حساب المسافة AB :

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

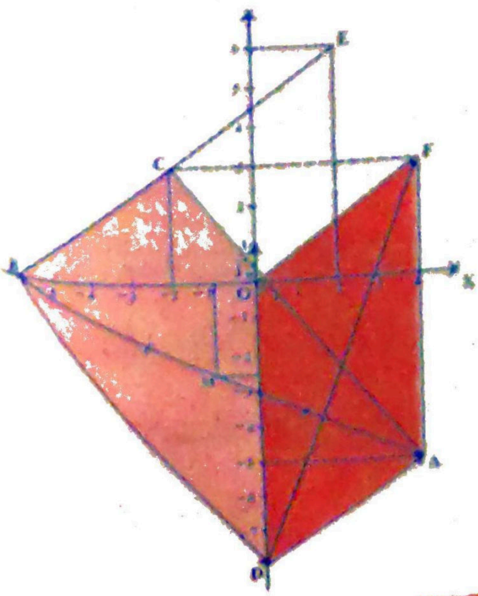
$$AB=\sqrt{\left(3-(-1)\right)^2+\left(2-3\right)^2}=\sqrt{17}$$

$C(0\,;1)$، لتمثيل النقطة H بحيث يكون

(2)... $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$:

الشعاع $\overrightarrow{CH}$ هو مجموع الشعاعين $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ (لهما نفس المبدأ)، معناه النقطة H هي الراس الرابعة لمتوازي الأضلاع ACBH .(أنظر الشكل السابق).

أو نعين إحداثيتي النقطة H من المساواة (2) فنجد: $H(2\,;4)$



التمرين 09 : 1) أ) انظر الشكل.

ب) حساب الأطوال AB ، AC ، BC:

نطبق العلاقة

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

$$AB=\sqrt{((-6)-4)^2+(0-(-5))^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$$

$$AC=\sqrt{((-2)-4)^2+(3-(-5))^2}=\sqrt{100}=10$$

$$BC=\sqrt{(-2-(-6))^2+(3-0)^2}=\sqrt{25}=5$$

ج) نبين أن المثلث ABC قائم:

الضلع الأطول في المثلث ABC هو AB .

لنحسب AB^2، $AC^2 + BC^2$

لدينا $AB = \sqrt{125}$ ومنه:

$$AB^2 = 125...(1)$$

$$AC^2 + BC^2 = 10^2 + 5^2 = 125...(2)$$

من (1)،(2) وحسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورث نستنتج أن المثلث ABC قائم في C

2) أ) لإنشاء النقطة D انظر الشكل.

ب) النقطة D هي صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CA}$، أي : $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$

ومنه فالرباعي ACBD متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل .

ج) حساب $(x_D ; y_D)$ إحداثيي النقطة D:

لدينا: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$ ومنه:
$$\begin{cases} x_D - x_B = x_A - x_C \\ y_D - y_B = y_A - y_C \end{cases}$$

ومنه:
$$\begin{cases} x_D = x_A - x_C + x_B = 4 - (-2) + (-6) = 0 \\ y_D = y_A - y_C + y_B = -5 - 3 + 0 = -8 \end{cases}$$
ومنه: $D\ (0 ; -8)$

د) لتكن $M(x_M ; y_M)$ مركز المستطيل ACBD، لنحسب $(x_M ; y_M)$:

M مركز المستطيل ACBD ،فهي منتصف قطريه (M منتصف [AB] ومنتصف [CD])

M منتصف [AB] ومنه:
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-6 + 4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0 + (-5)}{2} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$ ،

ومنه: $M\left(-1 ; -\frac{5}{2}\right)$.

3) أ) لإنشاء النقطة E نظيرة B بالنسبة إلى C، انظر الشكل.

ب) حساب إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{BA}$:

$$\begin{cases} x_A - x_B = 4 - (-6) = 4 + 6 = 10 \\ y_A - y_B = -5 - 0 = -5 \end{cases}$$
ومنه: $\overrightarrow{BA}\ (10 ; -5)$.

4) لإنشاء النقطة F حتى يكون $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DA}$، انظر الشكل