تطبيقات نموذجية

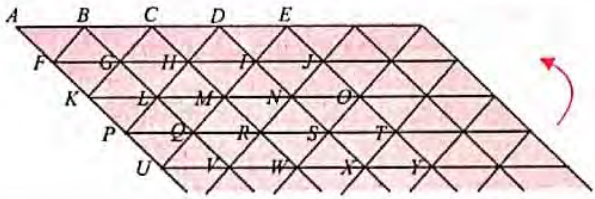
تطبيق 1

الشكل التالي مركب من مثلثات متقايسة الأضلاع
نعتبر الدوران الذي مركزه النقطة M و الزاوية $60°$ في اتجاه عقارب الساعة

1) أوجد صور النقط E, O, N بهذا الدوران

2) ما هي صورة الزاوية $N\hat{O}E$ بهذا الدوران؟

3) ماذا يمكن القول عن الزاوية $N\hat{O}E$ و صورتها؟



الحل

1) بما ان المثلث MNR متقايس الأضلاع فإن صورة النقطة N بهذا الدوران هي النقطة R
- بما ان المثلث MOX متقايس الأضلاع فإن صورة النقطة O بهذا الدوران هي النقطة X

الزاوية $E\hat{M}O = \frac{1}{2}H\hat{M}N = \frac{1}{2}\times 60° = 30°$

و الزاوية $O\hat{M}T = \frac{1}{2}M\hat{N}R = \frac{1}{2}\times 60° = 30°$ إذن الزاوية $E\hat{M}T = 60°$

و لدينا $ME = MT$ إذن صورة النقطة E بهذا الدوران هي النقطة T

2) بما ان صور النقط E, O, N هي T, X, R فإن صورة الزاوية $N\hat{O}E$ هي الزاوية $R\hat{X}T$
- الزاويتان $N\hat{O}E$ و $R\hat{X}T$ لهما نفس القيس $90°$

لأن $N\hat{O}E = N\hat{O}I + I\hat{O}E = 60° + 30° = 90°$

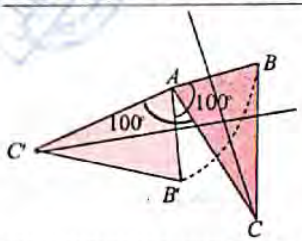
تطبيق 2

ABC مثلث ، و ليكن الدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $100°$ باتجاه عقارب الساعة

1) أرسم المثلث ABC ثم أنشئ النقطتين C' و B' صورتي C و B بهذا الدوران على الترتيب.

2) أنشئ صورة المنصف الزاوية $A\hat{B}C$ بهذا الدوران ، اشرح طريقة الإنشاء

الحل



1) ننشئ النقطة B' صورة B بالكيفية التالية

$B\hat{A}M = 100°$ في الاتجاه السالب و $AB' = AB$

- بنفس الكيفية السابقة ننشئ النقطة C' صورة C

2) صورة المنصف الزاوية $A\hat{B}C$ هو المنصف الزاوية $A\hat{C}B'$ لأن الدوران يحفظ الزوايا

تطبيق 3

النقط A, B, C, M, N تنتمي إلى دائرة مركزها النقطة O

1) احسب قيس الزاوية $A\hat{M}B$

2) احسب قيس كل زاوية في المثلث BOC

3) استنتج قيس كل من الزاويتين $A\hat{O}C$ و $A\hat{M}C$

الحل

1) الزاوية $A\hat{M}B$ محيطية و الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية يحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدائرة

لأن $A\hat{M}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = 42{,}5°$

2) الزاوية $B\hat{O}C$ و الزاوية $B\hat{N}C$ الأولى مركزية و الثانية محيطية تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{BC}$

إذن $B\hat{O}C = 2 \times B\hat{N}C = 2 \times 20° = 40°$

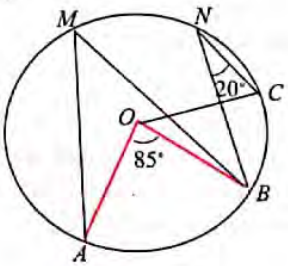
المثلث BOC متقايس الساقين و بالتالي $O\hat{B}C = B\hat{C}O$

و بما أن $O\hat{B}C + B\hat{C}O + B\hat{O}C = 180°$

فإن $O\hat{B}C + O\hat{B}C + 40° = 180°$

إذن $2 \times O\hat{B}C = 180° - 40°$

$O\hat{B}C = \frac{140°}{2} = 70°$



3) لدينا $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C = 85° + 40° = 125°$

ولدينا $A\hat{M}C = A\hat{M}B + B\hat{M}C$

لكن $B\hat{M}C = \frac{1}{2}B\hat{O}C = 20°$

إذن $A\hat{M}C = 42{,}5° + 20° = 62{,}5°$

تطبيق 4

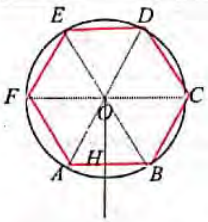
$ABCDEF$ سداسي منتظم مركزه النقطة O و طول ضلعه $4cm$

1) احسب قيس زوايا المثلث OAB

2) ما هو طول نصف قطر الدائرة ذات المركز O و المار بالنقطة A ؟ برر اجابتك

3) أنشئ هذا السداسي المنتظم

الحل



1) الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية $A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$

المثلث AOB متقايس الساقين لأن $OA=OB$

و بالتالي $O\hat{A}B=A\hat{B}O=60^\circ$

2) طول نصف قطر الدائرة التي مركزها O و المار بالنقطة A هو OA

لتكن H منتصف القطعة $[AB]$:عندئذ يكون المستقيم (OH) هو محور القطعة $[AB]$

إذن المثلث AOH قائم في H . و قيس الزاوية $A\hat{O}H=30^\circ$

لدينا $\sin 30^\circ=\frac{AH}{OH}$ و منه $OA=\frac{AH}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\times AB}{\sin 30^\circ}$ اي $OA=\frac{\frac{1}{2}\times 4}{\frac{1}{2}}=4cm$

• **طريقة أخرى**

بما أن كل زوايا المثلث OAB متقايسة فإن OAB مثلث متقايس الأضلاع و عليه

$OA=AB=4cm$

- نتبع نفس خطوات التمرين التدريبي 1 الموجودة في الفقرة 4 .

تطبيق 5

$ABCDEF$ سداسي منتظم مركزه النقطة O و طول ضلعه $4cm$

1) أ) برهن أن المثلث AOB متقايس الأضلاع

ب) ما طبيعة الرباعي $AOCB$

ج) احسب الطول AC

2) أ) احسب قيس الزاوية $C\hat{A}E$

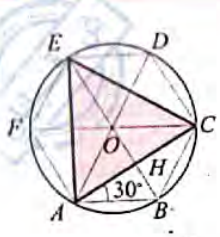
ب) استنتج أن المثلث CAE متقايس الأضلاع

الحل

1) أ) الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية $A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$

بما أن $OA=OB$ فإن $O\hat{A}B=A\hat{B}O=60^\circ$

إذن المثلث AOB متقايس الأضلاع



ب) بما أن AOB متقايس الأضلاع فإن (AC) منصف للزاوية $O\hat{A}B$ و بالتالي $C\hat{A}B = 30°$

لدينا $A\hat{H}B + C\hat{A}B + O\hat{B}A = 180°$

و بالتالي $A\hat{H}B = 180° - 30° - 60° = 90°$

إذن الرباعي $AOCB$ فيه القطران متعامدان و الأضلاع كلها متقايسة و عليه $AOCB$ معين

ج) حساب الطول AC .

لدينا H منتصف القطعتين $[AC]$ و $[OB]$ و بالتالي $AC = 2AH$

$\cos 30° = \frac{AH}{AB}$ و منه $AH = AB\cos 30° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}cm$

إذن $AC = 4\sqrt{3}cm$ $AC = 2AH = 2 \times 2\sqrt{3}cm$

2) أ) $C\hat{A}E = \frac{1}{2}C\hat{O}E$

إذن $C\hat{O}E = 2C\hat{O}D = 2 \times 60° = 120°$ $C\hat{A}E = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$

ب) بنفس الكيفية نجد $A\hat{E}C = E\hat{C}A = 60°$ إذن المثلث CAE متقايس الأضلاع

تطبيق 6

$ABCDEF$ سداسي منتظم مركزه النقطة O . عين صورة المثلث BCO

1) بالتناظر ذي المحور (BE)

2) بالتناظر المركزي الذي مركزه النقطة O

3) بالانسحاب الذي شعاعه AF

4) بالدوران الذي مركزه النقطة O و الزاوية $60°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة

الحل

1) تعين صورة المثلث BCO بالتناظر المحوري الذي محوره (BE)

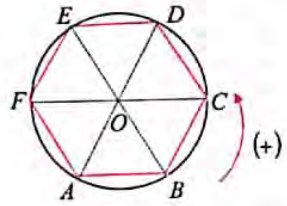
بما أن $(CF) \perp (BE)$ فإن نظيرة C هي F

نظيرة B هي B (لأن B نقطة من المحور)

نظيرة O هي O (لأن O نقطة من المحور)

إذن صورة المثلث BCO هي المثلث BFO

2) تعين صورة المثلث BCO بالتناظر المركزي الذي مركزه النقطة O



نظيرة B هي E

نظيرة O هي O

نظيرة C هي F

إذن صورة المثلث BCO بالتناظر المركزي هو المثلث EFO

3) تعين صورة المثلث BCO بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{AF}$

صورة B هي O

صورة النقطة C هي D

صورة النقطة O هي E
إذن صورة المثلث BCO بهذا الانسحاب هو المثلث ODE

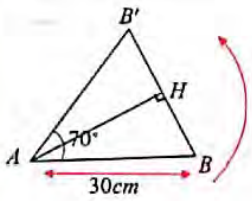
4) تعين صورة المثلث BCO بالدوران
صورة النقطة B هي C
صورة النقطة C هي D
صورة النقطة O هي O (لأن O مركز الدوران تبقى ثابتة)
إذن صورة المثلث BCO بهذا الانسحاب هو المثلث CDO

تطبيق 7

مسطرة طولها $30cm$ ندوها حول أحد أطرافها بزاوية قدرها $70°$

1) أرسم شكلا لهذه الوضعية مع تمثيل المسطرة بقطعة مستقيمة .
2) ما هي المسافة التي تفصل بين الطرف الثاني عن وضعيته في الحالة الابتدائية تعطى (النتيجة مدورة إلى 0,01).

الحل



1) الشكل
2) المسافة المطلوبة هي BB'
لدينا $AB = AB'$ و بالتالي المثلث ABB' متقايس الساقين
لتكن H منتصف $[BB']$
إذن $[AH]$ هو محور القطعة $[BB']$ منصف الزاوية $B\hat{A}B'$
و منه $B\hat{A}H = 35°$

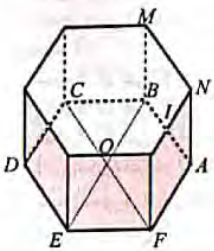
$\sin B\hat{A}H = \frac{BH}{AB}$ و منه $BH = AB.\sin B\hat{A}H$ و لدينا $BB' = 2\times BH$

$= 2\times 30\sin 35° \approx 34,414cm$

النتيجة مدورة إلى 0,01 هي 34,41

تطبيق 8

علبة على شكل موشور ارتفاعه $4cm$ ، قاعدته سداسي منتظم $ABCDEF$
مركزه النقطة O مع $OA = 5cm$



1) احسب المسافة الجانبية لهذا الموشور
2) احسب القيمة المضبوطة للارتفاع OI في المثلث OAB
3) احسب المساحة بالسنتيمتر مربع للمثلث OAB
ثم استنتج مساحة قاعدة الموشور
4) عين القيمة المضبوطة لحجم الموشور ثم النتيجة إلى الوحدة

الحل

1) المسافة الجانبية لهذا الموشور هي 6 أضعاف مساحة المستطيل $ABNM$
لحساب مساحة المستطيل $ABNM$ نحسب أولا الطول AB
المثلث OAB متقايس الأضلاع و $[OI]$ الارتفاع المتعلق بالضلع $[AB]$ و هو في نفس الوقت يعبر
منصف للزاوية $A\hat{O}B$ إذن $A\hat{O}I=\frac{1}{2}A\hat{O}B=30°$

لدينا $\sin A\hat{O}I=\frac{AI}{OA}$ و منه $AI=OA.\sin A\hat{O}I$

إذن $AB=2AI=2\times OA\times\sin A\hat{O}I=2\times5\times\frac{1}{2}=5cm$

- **طريقة أخرى**

المثلث AOB متقايس الأضلاع إذن $AB=OB=OA=5cm$
- مساحة المستطيل $ABNM$ هي $AB\times AN$ اي $4\times5\,cm$ و تساوي $20\,cm^2$
و بالتالي المساحة الجانبية للموشور هي $6\times20=120\,cm^2$

2) حساب OI

لدينا $\cos A\hat{O}I=\frac{OI}{OA}$ و منه $OI=OA\times\cos A\hat{O}I=5\times\cos(30°)=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}cm$

3) مساحة المثلث OAB هي $\frac{AB\times OI}{2}$

$$\frac{AB\times OI}{2}=\frac{5\times\frac{5}{2}\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{5}}{4}cm^2$$

- مساحة قاعدة الموشور هي 6 أضعاف مساحة المثلث OAB أي $6\times\frac{25\sqrt{5}}{4}cm^2$ و بالتبسيط نجد

$$\frac{75\sqrt{5}}{2}cm^2$$

4) حجم الموشور هو $\frac{1}{3}B\times h$ حيث B مساحة القاعدة و h الارتفاع

$$\frac{1}{3}B\times h=\frac{1}{3}\times\frac{75\sqrt{5}}{2}\times4=25\sqrt{5}\times2cm^2=50\sqrt{5}cm^2$$

القيمة المدورة إلى الوحدة هي $112cm^2$

تمارين و مسائل

1

ABC مثلث متقايس الساقين في A بحيث $AB = 5cm$ و $B\hat{A}C = 65°$ ،
M نقطة من القطعة $[AB]$ بحيث $MB = 2cm$
الدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $65°$ اتجاهه من B إلى C
1) ما هي صورة النقطة B ؟
2) أنشئ النقطة N صورة النقطة M

2

1) أنشئ صورة المستقيم (d) بالدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $35°$ باتجاه عقارب الساعة(استعمل النقطتين B و C)
2) أنشئ المستقيم (d') صورة (d) بنفس الدوران السابق باستعمال النقطة H

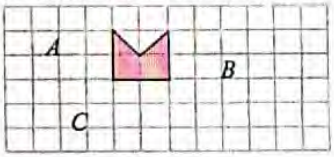
3

1) أنشئ دائرة (C) مركزها النقطة O و طول نصف قطرها $3cm$ ثم علم نقطة A على هذه الدائرة
2) أنشئ صورة هذه الدائرة بالدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $45°$ في اتجاه عقارب الساعة

4

أ) أنشئ صورة المثلث ABC بحيث $BC = 3cm$ ، $BA = 6cm$ ، $CA = 5cm$
ب) أنشئ صورة هذا المثلث بالدوران الذي مركزه النقطة A بحيث صورة النقطة B موجودة على نصف المستقيم $[AC)$

5



أنقل هذا الشكل على ورقة مليمتريه ثم أنشئ صورة الشكل الملون بالدوران الذي زاويته $90°$ و في اتجاه عقارب الساعة و مركزه ،
أ) النقطة A ، ب) النقطة B ، ج) النقطة C

6

C, B, A ثلاث نقط متتالية من عشاري منتظم مركزها النقطة O
- احسب قيس الزاوية $A\hat{B}C$

7

$ABCDE$ خماسي منتظم مركزها النقطة O مع $OA = 8cm$
أحسب القيمة المضبوطة لمحيط هذا الخماسي

8

1) أنشئ قطعة مستقيمة $[AB]$ طولها $4cm$ ثم أنشئ C صورة النقطة B بالدوران الذي زاويته $90°$ و مركزه النقطة A

2) أ) أنشئ D صورة C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $135°$ باتجاه معاكس لعقارب الساعة

ب) هل النقط D, B, A على استقامة واحدة.

9

1) أ) أرسم قطعة مستقيمة $[AB]$ طولها $4cm$

ب) أنشئ النقطة C صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $36°$

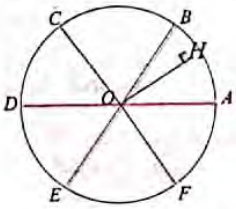
ج) أنشئ النقطة D صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه النقطة B و زاويته $36°$ بنفس الاتجاه السابق د) برهن أن المستقيمين (AC) و (BD) متوازيان

هـ) برهن أن $ABCD$ متوازي أضلاع و) عين قيس كل زوايا متوازي الأضلاع

10

I) 1) - احسب طول الضلع و مساحة المربع الذي محيطه يساوي $120cm$

II) الشكل المجاور يمثل سداسي منتظم $ABCDEF$



محيطه $120cm$ محاط بدائرة مركزها النقطة O ،

و يشكل من 6 مثلثات متقايسة الأضلاع

القطعة $[OH]$ هي ارتفاع في المثلث OAB

1) احسب الطول AB

2) استنتج AH ثم القيمة المضبوطة لـ OH

3) أحسب القيمة المضبوطة لمساحة المثلث OAB

4) أحسب القيمة المضبوطة ثم القيمة المدورة

إلى $0,1cm$ بالزيادة لمساحة السداسي المنتظم الذي محيطه $120cm$

11

أحسب قيس زاويا المثلث ABC مع العلم أن

$A\hat{O}B = 40°$ و $B\hat{O}C = 145°$

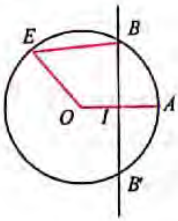
مبررا إجابتك.

12

A نقطة من دائرة مركزها O و طول نصف قطرها $5cm$ ،

محور القطعة $[OA]$ يقطع دائرة في النقطتين B و B'

و يقطع القطعة $[OA]$ في I و ليكن الوتر $[BE]$ طوله BI



1) أحسب القيمة المضبوطة لـ BI

2) نرمز بـ H إلى منتصف $[BE]$

احسب $\sin H\hat{O}B$

3) استنتج قيس الزاوية $B\hat{O}E$