تطبيقات على الأعداد الصحيحة

تطبيق 1

- أوجد جميع قواسم كل عدد من الأعداد الآتية

36 , 15 , 45 , 3×19 , $2\times13\times17$

الحل

لدينا $36=2^2\times3^2$ إذن قواسم العدد 36 هي 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 9 , 12 , 18 , 36

لدينا $15=3\times5$ إذن قواسم العدد 15 هي 1 , 3 , 5 , 15

العدد 45 يكتب $45=3^2\times5^1$

إذن قواسم العدد 45 هي 1، 3، 5، 9، 15، 45

قواسم 3×19 هي 1 , 3 , 19 , 3×19

إذن قواسم العدد $2\times13\times17$ هي 1 , 2 , 13 , 2×13 , 17 , 2×17 , 13×17 , $2\times13\times17$

تطبيق 2

a , b , c ثلاثة أعداد طبيعية حيث

$a=2^2\times3\times7^4$ ، $b=2^3\times3^2\times5^2$ ، $c=3^4\times2^2\times11^3$

1) هل العدد 2^2 قاسم مشترك للعددين a و b ؟

2) هل العدد $2^2\times3^2$ قاسم مشترك للعددين b و c ؟

3) هل العدد 6 قاسم مشترك للعددين a و c ؟

الحل

1) لدينا $a=2^2\times(3\times7^4)$ و منه نستنتج أن العدد 2^2 قاسم للعدد a

لدينا $b=2^2(2\times3^2\times5^2)$ و منه نستنتج أن العدد 2^2 قاسم للعدد b

إذن العدد 2^2 قاسم مشترك للعددين a و b

2) لدينا $b=2^2\times3^2\times(2\times5^2)$ إذن $2^2\times3^2$ قاسم للعدد b

لدينا $c=2^2\times3^2\times(3^2\times11^3)$ و منه $2^2\times3^2$ قاسم للعدد c

إذن العدد $2^2\times3^2$ قاسم مشترك للعددين b و c

3) لدينا $a=6\times(2\times7^4)$ أي $a=(2\times3)(2\times7^4)$ إذن 6 قاسم للعدد a

لدينا $c=6\times(3^3\times2\times11^3)$ أي $c=(2\times3)(3^3\times2\times11^3)$ إذن 6 قاسم للعدد c

و بالتالي العدد 6 قاسم مشترك للعددين a و c

تطبيق 3

احسب القاسم المشترك الأكبر لكل عددين من الأعداد الآتية باستعمال خوارزمية إقليدس

1) 462 و 546
2) 5742 و 1782
3) 1160 و 1856

الحل

1)

الحاصل	1	5	2
546	462	84	42
الباقي	84	42	0

القاسم المشترك الأكبر هو آخر باق غير معدوم في القسمات المتتابعة

إذن $PGCD(546,462)=42$

2)

الحاصل	3	4	2
5742	1782	396	198
الباقي	396	198	0

آخر باق غير معدوم هو 198 و منه $PGCD(5742,1782)=198$

3)

الحاصل	1	1	1	2
1856	1160	696	464	232
الباقي	696	464	332	0

آخر باق غير معدوم هو 332 إذن $PGCD(1856,1160)=232$

تطبيق 4

1) اختزل الكسور الآتية

ا) $\frac{888}{1776}$ ، ب) $\frac{2112}{612}$ ، ج) $\frac{945}{1197}$

2) اختزل إن أمكن

ا) $\frac{15+24}{3+18}$ ، ب) $\frac{63-14}{28+42}$ ، ج) $\frac{6+48+66}{12+36+72}$

الحل

1) لإختزال الكسور نبحث أولا عن القاسم المشترك الأكبر للبسط و المقام ثم نقسم كلا من البسط و المقام على القاسم المشترك الأكبر.

ا)

الحاصل	2
1776	888
الباقي	0

آخر باق غير معدوم هو 888 إذن $PGCD(1776,888)=888$

و بالتالي $\frac{888}{1776}=\frac{888:888}{1776:888}=\frac{1}{2}$.

ب)

الحاصل	3	2	4	1	1	2
2112	612	276	60	36	24	12
الباقي	276	60	36	24	12	0

آخر باق غير معدوم هو 12 إذن $PGCD(2112,612)=12$

و بالتالي $\frac{2112}{612}=\frac{2112:12}{612:12}=\frac{176}{51}$

ج)

الحاصل	1	3	1	3
1197	945	252	189	63
الباقي	252	189	63	0

آخر باق غير معدوم هو 63 إذن $PGCD(1197,945)=63$

و بالتالي $\frac{945}{1197}=\frac{945:63}{1197:63}=\frac{15}{19}$

2) ا) نلاحظ ان الأعداد 15 , 24 , 3 , 18 تقبل القسمة على 3

وبالتالي $\frac{15+24}{3+18}=\frac{5+8}{1+6}=\frac{13}{7}$

ب) نلاحظ ان الأعداد 14, 63, 42, 28 تقبل القسمة على 7

و بالتالي $\frac{63-14}{28+42}=\frac{9-2}{4+6}=\frac{7}{10}$

ج) نلاحظ ان الأعداد 6 , 12, 48 , 36 , 72 , 66 تقبل القسمة على 6

و بالتالي $\frac{6+48+66}{12+36+72}=\frac{1+8+11}{2+6+12}=\frac{20}{20}=1$

تطبيق 5

a و b عددان طبيعيان أوليان

1) هل العددان a 2 و b 6 أوليان فيما بينهما ؟

2) هل العددان a 3 و b 5 أوليان فيما بينهما ؟

3) هل العددان a 3 و a 5 أوليان فيما بينهما ؟

الحل

1) قواسم العدد $2a$ هي $2a, a, 2, 1$ من بين قواسم $6b$ نجد 2
إذن العدد 2 قاسم مشترك للعدد $2a$ و $6b$ و بالتالي
$PGCD(2a,6b) \neq 1$ إذن $2a$ و $6b$ ليس أوليان فيما بينهما .

2) العددان $3a$ و $5b$ ليسا أوليين فيما بينهما
لأنه لو أخذنا $a=10$ و $b=9$ نجد $3a=30$ و $5b=45$
و العددان 30 و 45 ليسا أوليين فيما بينهما.

3) قواسم العدد $3a$ هي $3a, a, 3, 1$
قواسم العدد $5a$ هي $5a, a, 5, 1$ و منه القواسم المشتركة للعددين $3a$ و $5a$ هي 1 و a
إذن العددان $3a$ و $5a$ ليسا أوليين فيما بينهما شريطة ان يكون $a \neq 1$

تطبيق 6

- أوجد جميع قواسم كل عدد من هذه الأعداد 120, 280, 180 ثم استنتج القواسم المشتركة لها و معينا القاسم المشترك الأكبر.

الحل

120	2
60	2
30	2
15	5
3	3
1	

$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

280	2
140	2
70	2
35	5
7	7
1	

$280 = 2^3 \times 5 \times 7$

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

قواسم العدد 120 هي
$120, 60, 40, 30, 24, 20, 15, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1$
قواسم العدد 280 هي
$280, 140, 70, 40, 35, 28, 20, 14, 10, 8, 6, 7, 5, 4, 2, 1$
قواسم العدد 180 هي
$180, 90, 60, 45, 36, 30, 20, 18, 15, 12, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1$
إذن القواسم المشتركة للأعداد 120, 280, 180 هي $20, 10, 5, 4, 2, 1$
و منه القاسم المشترك الأكبر هو 20

تطبيق 7

1) a و b عددان طبيعيان حيث $5a \leq 4b$ بين أن
أ) $28b - 35a$ يقسم 7
ب) $28b + 35a$ يقسم 7

2) إذا علمت أن $a = 1320$ b 2160 عين الكسر $\frac{a}{b}$ ثم أعط النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

الحل

1) أ) $28b-35a=7\times4b-7\times5a=7(4b-5a)=7k$
إذن العدد 7 يقسم $28b-35a$
ب) $28b+35a=7\times4b+7\times5a=7(4b+5a)=7k'$
إذن العدد 7 يقسم $28b+35a$

2) لدينا $2160\,a=1320\,b$ و منه نستنتج $2160\,\frac{a}{b}=1320$
و بالقسمة على 2160 نجد $\frac{a}{b}=\frac{1320}{2160}$
لدينا $PGCD(1320,2160)=120$ وبالتالي $\frac{a}{b}=\frac{1320:120}{2160:120}=\frac{11}{18}$

تطبيق 8

عندما نقسم 188 على العدد x نجد الباقي 10 و عندما نقسم 315 على العدد x نجد الباقي 7 أوجد العدد x علما أن $10\langle x\langle15$

الحل

إذن $315=xq'+7$ و $186=xq+10$
و منه نستنتج $176=xq$ و $308=xq'$
و من المساويتين الأخيرتين نستنتج أن العدد x يقسم 176 و يقسم 308 إذن x قاسم مشترك للعددين 176 و 308
نبحث عن $PGCD(176,308)$

186	x
10	q

315	x
7	q'

الحاصل	1	1	3
308	176	132	44
الباقي	132	44	0

آخر باق غير معدوم هو 44 إذن $PGCD(176,308)=44$
وبما أن $44=2^2\times11^1$ فإن قواسم العدد 44 هي $44,22,11,4,2,1$
مجموعة القواسم المشتركة للعددين 176 و 308 هي مجموعة قواسم العدد 44
أي $44,22,11,4,2,1$
و بما أن العدد x محصور بين 10 و 15 فإن $x=11$

تطبيق 9

A و B عبارتان جبريتان حيث $A=2x^2+3x-5$ و $B=(-3x+4)(x+1)$
- احسب كل من قيمة A و B في كل حالة من الحالات الآتية

$x=0$ ، $x=2\times10^{-3}$ ، $x=\frac{1}{2}$

الحل

من اجل $x=\frac{1}{2}$

$$A=2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{2}-5=2\times\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-5=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-5=2-5=-3$$

$$B=\left(-3\times\frac{1}{2}+4\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)=\left(\frac{-3+8}{2}\right)\left(\frac{1+2}{2}\right)=\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$$

من اجل $x=2\times10^{-3}$

$$A=2(2\times10^{-3})^2+3(2\times10^{-3})-5=2\times(4\times10^{-6})+6\times10^{-3}-5$$
$$=0,000008+0,006-5=0,006008-5=-4,993992$$

$$B=(-3\times2\times10^{-3}+4)(2\times10^{-3}+1)=(4-0,006)(1+0,002)$$
$$=3,994\times1,002=4,001988$$

من اجل $x=0$

$$A=2\times0^2+3\times0-5=-5$$
$$B=(-3\times0+4)(0+1)=4\times1=4$$

تطبيق 10

1) أوجد عددين طبيعيين مجموعهما 72 و قاسمهما المشترك الأكبر هو 6
2) أوجد عددين طبيعيين جداؤهما 240 و قاسمهما المشترك الأكبر 4

الحل

1) ليكن a و b عددين طبيعيين مجموعهما 72 و القاسم المشترك الأكبر لهما 6

إذن يمكن وضع $\begin{cases}a+b=72\\PGCD(a,b)=6\end{cases}$

العدد 6 يقسم a و b إذن يوجد عددان طبيعيان a',b' اوليان فيما بينهما بحيث $a=6a'$ و $b=6b'$

إذن المساواة $a+b=72$ تصبح $a'+b'=12$.....(*)

و منه الثنائيات التي تحقق (*) مدونة في الجدول التالي

a'	1	11	5	7
b'	11	1	7	5

إذن الثنائيات (a,b) التي تحقق المعطيات هي

a	6	30	42	66
b	66	42	30	6

2) ليكن a و b عددين طبيعيين حيث $\begin{cases} ab=240 \\ PGCD(a,b)=4 \end{cases}$

العدد 4 يقسم a و b إذن $a=4a'$ و $b=4b'$
مع a' و b' أوليين فيما بينهما .
نعوض a و b في المساواة $ab=240$ فنجد $a'b'=240$ 16 و منه $a'b'=15$
الثنائيات (a',b') التي تحقق المساواة $a'b'=15$ هي
$(1,15)$, $(15,1)$, $(3,5)$, $(5,3)$ لأن $15=1\times15$ و $15=3\times5$
إذن الثنائيات (a,b) التي تحقق المعطيات هي $(4,60)$, $(60,4)$, $(12,20)$, $(20,12)$

تطبيق 11

ليونس 72 وردة حمراء و 78 وردة بيضاء .
يريد أن يصنع باقات متماثلة من حيث عدد الوردات الحمراء و البيضاء .
1) ما هو أكبر عدد من الباقات التي يمكن تشكيلها .
2) ما هو عدد الوردات الحمراء و عدد الوردات البيضاء التي تكون في كل باقة ثم احسب عدد وردات الباقة الواحدة.

الحل

1) ليكن العدد x عدد الباقات التي يمكن تشكيلها
إذن العدد x يقسم 72 ويقسم ايضا 78 و بالتالي x يقسم القاسم المشترك الأكبر لهما .

الحاصل	1	12
308	72	6
الباقي	6	0

اخر باق غير معدوم هو 6 وبالتالي $PGCD(72,78)=6$
إذن العدد x يأخذ احد القيم 1, 2, 3, 6
و بما ان x يأخذ اكبر قيمة إذن $x=6$ و عليه عدد الباقات المشكلة هي 6

2) عدد الوردات الحمراء هي $\frac{72}{6}=12$ و عدد الوردات البيضاء هي $\frac{78}{6}=13$
و عدد عناصر الباقة هو $13+12$ اي 25

تطبيق 12

لإبراهيم منتوج من البطاطا وزنه 2080 kg و منتوج من الجزر وزنه 1440 kg
أراد إبراهيم وضع هذا المنتوج في أكياس بحيث تحتوي كلها نفس الوزن شرط أن لا يكون المنتوجان في نفس الكيس .
1) ما هو أكبر وزن يمكن وضعه في كل كيس ؟
2) ما هو عدد الأكياس لكل منتوج ؟

الحل

1) ليكن العدد x وزن المنتوج في الكيس .
x يقسم 2080 و يقسم 1440
و بالتالي x يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين 2080 و 1440
لدينا $PGCD(2080,1440)=20$
إذن العدد x يأخذ أحد القيم $20,10,5,4,2,1$
و بما أن x أكبر وزنا فإن $x=20$

2) عدد الأكياس التي يضع فيها إبراهيم منتوج البطاطا هي $\frac{2080}{20}=104$

وعدد الأكياس التي يضع فيها الجزر هي $\frac{1440}{20}=77$

تمارين و مسائل

1

ليكن A و B عددين حيث $A=5\sqrt{54}-9\sqrt{6}-3\sqrt{24}$ و $B=\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{216}}$

ا) بين أن A عدد طبيعي

ب) بين أن B عدد ناطق .+

2

A و B عددان حيث $A=4.\frac{8^{12}}{8^{13}}$ ، $B=4.\frac{2^8.9^6}{2^6.9^8}$

بين أن العدد A عدد عشري و أن B عدد ناطق غير عشري

3

في كل حالة من الحالات الآتية احسب $PGCD$ للعددين المعطيين و هذا بعد كتابة قائمة القواسم لهذه الأعداد .

ا) 72 و 108 ، ب) 126 و 128 ، ج) 120 و 192

4

بدون حساب اشرح لماذا في كل حالة العددين الآتيين ليس أوليين فيما بينهما

ا) 436 و 324 ، ب) 42 و 36 ، ج) 350 و 380

5

1) اكتب قائمة قواسم كل من العددين 72 و 120

2) ما هي القواسم المشتركة للعددين 72 و 120

3) ما هو $PGCD$ للعددين 72 و 120؟

4) اكتب قائمة قواسم $PGCD$ و ماذا يمكن أن نستنتج ؟

6

باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD$ للعددين المعطيين في كل حالة من الحالات الآتية

ا) 19230 و 10256 ، ب) 5367 و 3030

7

1) احسب $PGCD$ 12705 و 565760

2) احسب $A=\frac{12705}{PGCD}$ و $B=\frac{565760}{PGCD}$

3) تحقق أن A و B أوليين فيما بينهما

8

اكتب الكسور الآتية على شكل كسور غير قابلة للاختزال

ا) $\frac{524160}{68796}$ ،

ب) $\frac{28260}{17270}$

9

1) احسب ثم أعط النتيجة على شكل كسر غير قابل للإختزال حيث

$$A=\frac{7}{15}-\frac{2}{15}\cdot\frac{25}{14}$$

2) اكتب B على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر عدد ممكن

3) أعط الكتابة العلمية للعدد C حيث

$$C=\frac{4,9.10^{-3}.1,2.10^{13}}{14.10^{2}.3.10^{5}}$$

4) ما هو $PGCD$ للعددين 96 و 156 ؟

استعمل هذه النتيجة لجعل الكسر $\frac{96}{156}$ غير قابلة للاختزال

10

1) اكتب على شكل كسر غير قابلة للاختزال العدد $\frac{325}{1053}$. (استعمل $PGCD$ للعددين 325 و 1053)

2) عين العدد x بحيث $x^2=\frac{325}{1053}$

3) احسب $A=\sqrt{1053}-3\sqrt{325}+2\sqrt{52}$

ثم اكتب النتيجة على الشكل $a\sqrt{13}$ حيث a عدد طبيعي.

11

نضع $M=\frac{20755}{9488}-\frac{3}{8}$

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20755 و 9488

2) اكتب العدد M على شكل كسر غير قابل للاختزال مع توضيح الطريقة المستعملة

3) هل العدد M عدد عشري أم عدد ناطق؟

12

1) هل العددان 756 و 441 أوليان فيما بينهما؟

2) هل الكسر $\frac{756}{441}$ قابل للاختزال ؟ فإذا كان كذلك ، اكتبه على شكل كسر غير قابل للاختزال مع تبرير الحسابات

3) احسب المجموع $D=\frac{756}{441}+\frac{19}{21}$

13

1) احسب $PGCD$ للعددين 110 و 88

2) عامل لديه قطعة حديدية مستطيلة الشكل طولها $110\,cm$ و عرضها $88\,cm$ أراد أن يقسمها إلى قطع مربعة الشكل كلها متماثلة بحيث لا يضيع منها أي شيء

ما هو طول حرف المربع؟

ما هو عدد القطع المربعة المحصل عليها .

14

1) ا) احسب 44^2

ب) احسب $PGCD$ للعددين 7744 و 17424

جـ) استنتج الجداء التربيعي للعددين 7744 و 17424 بدون استعمال الآلة الحاسبة

- بين أن الكسر $\frac{7744}{17424}$ غير قابل للاختزال

2) مستطيلان لهما نفس المساحة و طولهما L_1 و L_2 بالتر.متناسبان مع 7744 و 17424 و مجموع عرضيهما l_1 حيث l_2 يساوي $15{,}6\,m$

احسب l_1 و l_2

15

$F=\frac{n+10}{n-5}$ حيث n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 6

1) في كل حالة من الحالات الآتية أعط الكتابة الغير القابلة للاختزال للعدد F

ا) $n=10$ ، ب) $n=26$ ، ج) $n=4$

2) ا) برهن أن $F=1+\frac{15}{n-5}$

ب) استنتج جميع قيم n التي من أجلها يكون F عددا طبيعيا.