تمارين القاسم المشترك الأكبر

التمرين 01:

أكمل الفراغات التالية حتى يكون العدد. 3 .1 قابلا للقسمة على 2 و 9 في آن واحد

التمرين 02:

1) أكتب كل قواسم 40 و 100 .

2) ما هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين 40 و 100 ؟

3) استنتج القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين .

التمرين 03:

1) أكتب كل قواسم العددين 63 و 64 .

2) استنتج PGCD(63 ; 64) ، ما ذا نقول عن العددين 63 و 64 ؟

التمرين 04:

1) بين أنه يوجد عددين طبيعيين محصورين بين 20 و 30 ، والذين يقبلان قاسمين فقط، عينهما.

2) هل العددان الموجودان أوليان فيما بينهما؟ علل.

التمرين 05:

فيما يلي، عين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ، ثم اجعل الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال:

1) $a=42$, $b=35$.

2) $a=68$, $b=102$.

3) $a=65$, $b=26$

4) $a=148$, $b=240$.

التمرين06:

اكتب العدد $\frac{325}{1053}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

مساعدة: نستطيع حساب PGCD للعددين 1035 و 325 .

التمرين 07:

نعتبر العدد A ، حيث: $A = \dfrac{20755}{9488} - \dfrac{3}{8}$.

1) احسب PGCD (القاسم المشترك الأكبر) للعددين 20755 و 9488 .
2) اكتب العدد A على شكل كسر غير قابل للاختزال.
3) هل العدد A عشري ؟ هل هو ناطق ؟ علل إجابتك.

التمرين 08:

لصاحب مكتبة 1631 كراس و 932 قلم، يريد وضع تلك الأدوات في علب متماثلة (أي: كل علبة تضم نفس العدد من الأقلام ومن الكراريس).

1) ما هو أكبر عدد من العلب التي يمكن تكوينها؟.
2) ما هو عدد الأقلام وعدد الكراريس في كل علبة؟

التمرين 09:

1) عين PGCD (108 ; 135) .
2) مجموعة أقلام تتكون من 108 قلم أزرق و 135 قلم أحمر ، نريد وضع تلك الأقلام في علب بحيث:

- كل العلب تضم نفس العدد من الأقلام الزرقاء.
- كل العلب تضم نفس العدد من الأقلام الحمراء.
- نستعمل كل الأقلام الزرقاء وكل الأقلام الحمراء.

ا) ما هو أكبر عدد من العلب التي يمكن تكوينها؟

ب) ما هو عدد الأقلام الزرقاء وعدد الأقلام الحمراء في كل علبة؟.

التمرين 10:

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر (PGCD) للعددين 880 و 1100 .
2) بناء يريد تبليط قاعة مستطيلة الشكل طولها 11m وعرضها 8,8m . لأجل ذلك جلب له المالك بلاطات متماثلة ومربعة الشكل.

ما هو طول ضلع المربع؟.

3) ما هو أكبر عدد من البلاطات التي يمكن استعمالها؟

التمرين 11:

نعتبر الكسر $\frac{5148}{1386}$.

1) عين طريقة من اختيارك لحساب $PGCD(5148 ; 1386)$.

2) استعمل نتيجة السؤال السابق لكتابة الكسر $\frac{5148}{1386}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

التمرين 12:

1) أحسب $PGCD(1756 ; 1317)$ ، مع توضيح الحسابات اللازمة.

2) لبائع الزهور 1756 وردة بيضاء و 1317 وردة حمراء ، يريد أن يستعمل كل هذه الزهور ليشكل أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة (أي تحتوي على نفس العدد من الورود البيضاء ومن الورود الحمراء).

ما هو عدد باقات الزهور؟

ما هو عدد الورود البيضاء في كل باقة؟

ما هو عدد الورود الحمراء في كل باقة؟

التمرين 13:

1) هل العددين 756 و 441 أوليين فيما بينهما ؟ علل إجابتك.

2) هل الكسر $\frac{756}{441}$ غير قابل للاختزال؟ إذا كان لا، أكتبه على شكل كسر غير قابل للاختزال مع التوضيح بالحساب

3) أحسب المجموع D ، حيث : $D = \frac{756}{441} + \frac{19}{21}$.

التمرين 14:

1) اجعل الكسرين التاليين غير قابلين للاختزال، وذلك باستعمال قواعد قابلية القسمة: $\frac{180}{210}$ ، $\frac{240}{105}$

2) اجعل الكسرين التاليين غير قابلين للاختزال، وذلك بعد حساب القاسم المشترك الأكبر لبسط ومقام كل منهما باستعمال خوارزمية اقليدس: $\frac{4862}{2145}$ ، $\frac{3450}{759}$.

التمرين 15:

بائع البيتزا، يحضرها على إناء مستطيل الشكل طوله 99 cm وعرضه 55 cm.

قبل بيعها يقطعها إلى قطع مربعة الشكل، حيث طول ضلع المربع هو عدد طبيعي بـ cm.

ما هو أكبر عدد من القطع التي يمكن تقطيعها دون ضياع؟

التمرين 16:

عمي علي الفلاح، يملك حقل نخيل مستطيلة الشكل طولها 135 m وعرضها 39 m يريد تسييجها.

لهذا الغرض يغرس أعمدة متساوية المسافة عن بعضها البعض، حيث تكون هذه المسافة عدد طبيعي مقاس بـ m

وأكبر من 2 m ، بالإضافة إلى ذلك يضع عمود في كل ركن من أركان الحقل.

1) ما هي المسافة الفاصلة بين كل عمودين؟

2) ما هو عدد الأعمدة؟

التمرين 17:

أحمد يريد تبليط رواق منزله مستطيل الشكل طوله 5,18 m وعرضه 1,85 m ببلاطات مربعة الشكل ، حيث طول ضلع المربع أكبر ما يمكن.

أحسب طول ضلع المربع.

التمرين 18:

بمتوسطة يريد المدير تنظيم دورة رياضية للتلاميذ بمناسبة يوم العلم، لذلك كلف أستاذ الرياضة البدنية بتنظيمها.

الأستاذ شكل أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة (أي كل فريق مؤلف من نفس العدد من الذكور ومن الإناث).

علما بأن المتوسطة بها 294 تلميذ و 210 تلميذة.

1) ما هو أكبر عدد ممكن من الفرق التي يمكن تشكيلها؟

2) أ) ما هو عدد التلاميذ في كل فريق؟

ب) ما هو عدد التلميذات في كل فريق؟

التمرين 19:

نظرا لحرارة فصل الصيف بولاية بسكرة ، أراد مدير إحدى المتوسطات بالتعاون مع جمعية أولياء التلاميذ تنظيم رحلة لـ 315 تلميذ مرفقين بـ 42 من موظفي المؤسسة إلى مدينة ساحلية.

كيف يمكننا تشكيل مجموعات بها نفس العدد من التلاميذ ونفس العدد من الموظفين؟

أعط كل الحلول الممكنة؟.

التمرين 20:

بائع الأدوات الكهرومنزلية لديه 180 مصباح (lampe de poche) و 405 بطارية لهذه المصابيح (piles) ، يريد أن يكون علبا متماثلة من حيث عدد المصابيح وعدد البطاريات ، بحيث يستعمل كل المصابيح وكل البطاريات.

1) ما هو أكبر عدد ممكن من العلب التي يمكن تشكيلها؟

2) ا) ما هو عدد المصابيح في كل علبة؟

ب) ما هو عدد البطاريات في كل علبة؟

3) نستعمل بطارية واحدة لكل مصباح ، ما هو عدد بطاريات الغيار في كل علبة؟

حلول تمارين القاسم المشترك

التمرين 01:

نستعمل قواعد قابلية القسمة:

يكون العدد قابلا القسمة على 2 إذا وفقط إذا كان رقم آحاده هو: 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8 .

ومنه نحصل على الأعداد التالية:

ا) **1 . 3 0** ب) **1 . 3 2** ج) **1 . 3 4** د) **1 . 3 6** هـ) **1 . 3 8** .

يكون العدد قابلا للقسمة على 9 إذا وفقط إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9 .

ومنه نحصل على:

الأعداد(**. 3 . 1**) التي تقبل القسمة على 2 و 9 في آن واحد هي:

ا') **1 5 3 0** ب') **1 3 3 2** ج') **1 1 3 4** د') **1 8 3 6** هـ') **1 6 3 8**

التمرين 02:

1) نستعمل قواعد قابلية القسمة:

قواسم 40 هي : 40 ; 20 ; 10 ; 8 ; 5 ; 4 ; 2 ; 1

قواسم 100 هي : 100 ; 50 ; 25 ; 20 ; 10 ; 5 ; 4 ; 2 ; 1 .

2) القواسم المشتركة للعددين 40 و 100 هي : 20 ; 10 ; 5 ; 4 ; 2 ; 1 .

3) مما سبق نستنتج أن: $PGCD(40 ; 100) = 20$.

التمرين 03:

1) قواسم 63 هي: 63 ; 21 ; 9 ; 7 ; 3 ; 1 .

قواسم 64 هي: 64 ; 32 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 .

2) مما سبق نستنتج أن : $PGCD(63 ; 64) = 1$. ومنه : العددان 63 و 64 أوليان فيما بينهما.

التمرين 04:

1) العددان المحصوران بين 20 و 30 والذين يقبلان قاسمين فقط هما : 23 و 29 .

2) القاسم المشترك الوحيد للعددين 23 و 29 هو 1 ، ومنه فالعددان أوليان فيما بينهما.

التمرين 05:

بقسمة حدي كسر على PGCD لهما
نحصل على كسر غير قابل للاختزال

1) $a = 42 = 6 \times 7$ ، $b = 35 = 5 \times 7$

ومنه : $\text{PGCD}(42 ; 35) = 7$.

$$\frac{a}{b} = \frac{42}{35} = \frac{42 \div 7}{35 \div 7} = \frac{6}{5}$$

2) $a = 68 = 2 \times 34$ ، $b = 102 = 2 \times 51 = 2 \times 3 \times 17 = 3 \times 34$

ومنه: $\text{PGCD}(68 ; 102) = 34$.

وبالتالي: $\frac{a}{b} = \frac{68}{102} = \frac{2 \times 34}{3 \times 34} = \frac{2}{3}$.

3) $a = \mathbf{65} = \mathbf{5} \times \mathbf{13}$ ، $b = \mathbf{26} = \mathbf{2} \times \mathbf{13}$.

ومنه: $\text{PGCD}(65 : 26) = 13$.

وبالتالي: $\frac{a}{b} = \frac{\mathbf{65}}{\mathbf{26}} = \frac{\mathbf{5} \times \mathbf{13}}{\mathbf{2} \times \mathbf{13}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$.

4) $a = 148 = 2 \times 74 = 4 \times 37$ ، $b = 240 = 4 \times 6 \times 10$

ومنه : $\text{PGCD}(148 ; 240) = 4$.

وبالتالي: $\frac{a}{b} = \frac{148}{240} = \frac{4 \times 37}{4 \times 60} = \frac{37}{60}$.

التمرين 06:

لحساب PGCD للعددين 1035 و 325 نستعمل خوارزمية اقليدس:

$$1\,053 = 325 \times 3 + 78$$

$$325 = 78 \times 4 + 13$$

$$78 = 6 \times 13 + 0$$

ومنه: $\text{PGCD}(1035 ; 325) = 13$.

نقسم حدي الكسر $\frac{325}{1035}$ على 13 ينتج:

$$\frac{325}{1035} = \frac{325 \div 13}{1035 \div 13} = \frac{25}{81} .$$

الكسر $\frac{25}{81}$ غير قابل للاختزال.

التمرين 07:

1) نستعمل خوارزمية اقليدس لحساب (9488 ; 20755) PGCD:

$$20755 = 9488 \times 2 + 1779$$

$$9488 = 1779 \times 5 + 593$$

$$1779 = 593 \times 3 + 0$$

آخر باقي غير معدوم هو: 593، ومنه: 593 = (9488 ; 20755) GCD .

2) باستعمال السؤال السابق ، نستطيع قسمة حدي الكسر $\frac{20755}{9488}$ على 593 نجد:

$\frac{20755}{9488} = \frac{35}{16}$.

ومنه: $A = \frac{20755}{9488} - \frac{3}{8} = \frac{35}{16} - \frac{3}{8} = \frac{35 - 3 \times 2}{16} = \frac{29}{16}$.

3) $\frac{29}{16} = 1{,}8125$ ، ومنه: العدد A عشري (لأن القسمة مضبوطة)، وهو ناطق.

التمرين 08:

1) عدد العلب هو قاسم مشترك للعددين 1631 و 932 ، لكي نحصل على أكبر عدد ممكن من العلب نبحث عن

(932 ; 1631) PGCD ، وذلك باستعمال خوارزمية اقليدس:

$$1631 = 932 \times 1 + 699$$

$$932 = 699 \times 1 + 233$$

$$699 = 233 \times 3 + 0$$

ومنه: 233 = (932 ; 1631) PGCD (وهو آخر باقي غير معدوم).

إذا: أكبر عدد من العلب التي يمكن تكوينها هو 233.

2) عدد الكراريس في كل علبة هو M حيث: $M = 1631 \div 233 = 7$

عدد الأقلام في كل علبة هو N حيث: $N = 932 \div 233 = 4$.

أي: كل علبة تحتوي على 7 كراريس و 4 أقلام .

التمرين 09:

1) باستعمال خوارزمية اقليدس نجد:

$$135 = 108 \times 1 + 27$$
$$108 = 27 \times 4 + 0$$

آخر باقي غير معدوم هو 27

ومنه: $PGCD\ (108\ ;\ 135) = 27$.

2) أ) عدد العلب هو قاسم مشترك لكل من عدد الأقلام الزرقاء وعدد الأقلام الحمراء، أكبر عدد من العلب التي يمكن تكوينها هو 27 لأن $PGCD\ (108\ ;\ 135) = 27$.

ب) $108 \div 27 = 4$ ، ومنه: عدد الأقلام الزرقاء هو 4 .

$135 \div 27 = 5$ ، ومنه: عدد الأقلام الحمراء هو 5 .

التمرين 10:

1) حساب $PGCD\ (1100\ ;\ 880)$:

$$1100 = 880 \times 1 + 220$$
$$880 = 220 \times 4 + 0$$

آخر باقي غير معدوم هو 220

ومنه: $PGCD\ (1100\ ;\ 880) = 220$

2) طول ضلع المربع هو القاسم المشترك الأكبر لطول وعرض القاعة، إذن هو 220 .

3) لدينا : $11m = 1100\ cm$ ، $8,8\ m = 880\ cm$.

$1100 \div 220 = 5$ ، ومنه : 5 هو عدد البلاطات في الطول.

$880 \div 220 = 4$ ، ومنه : 4 هو عدد البلاطات في العرض.

وبالتالي: أكبر عدد من البلاطات التي يمكن استعمالها هو:

$$5 \times 4 = 20$$

التمرين 11:

1) لنختار طريقة الفروق لحساب $PGCD(5148\,;\,1386)$:

$$5148 - 1386 = 3762$$
$$3762 - 1386 = 2376$$
$$2376 - 1386 = 990$$
$$1386 - 990 = 396$$
$$990 - 396 = 594$$
$$594 - 396 = 198$$
$$396 - 198 = 198$$
$$198 - 198 = 0$$

آخر فرق غير معدوم هو 198

ومنه: $PGCD(5148\,;\,1386) = 198$

2) لجعل الكسر $\frac{5148}{1386}$ غير قابل للاختزال نقسم حديه على 198:

أي:

$$\frac{5148}{1386} = \frac{5148 \div 198}{1386 \div 198} = \frac{26}{7}$$

، $\frac{26}{7}$ هو كسر غير قابل للاختزال

التمرين 12:

1) نستعمل خوارزمية اقليدس لحساب $PGCD(1756\,;\,1317)$:

$$1756 = 1317 \times 1 + 439$$
$$1317 = 439 \times 3 + 0$$

آخر باقي غير معدوم هو 439

2) عدد باقات الزهور هو قاسم مشترك للعددين 1756 و 1317 .

أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 1756 و 1317 ، فهو 439 .

عدد الورود البيضاء في كل باقة هو : $1756 \div 439 = 4$.

عدد الورود الحمراء في كل باقة هو : $1317 \div 439 = 3$.

أي كل باقة تشمل على 4 ورود بيضاء و 3 ورود حمراء.

التمرين 13:

1) باستعمال قاعدة قابلية القسمة على 3:

يمكن مباشرة ملاحظة أن: 3 قاسم مشترك للعددين 756 و 441 .

وإذا تعذر ذلك ، نلجأ إلى البحث عن PGCD .

في الحالتين نجد أن العددين 756 و 441 غير أوليين فيما بينهما.

2) من السؤال السابق وجدنا أن الكسر قابل للاختزال:

باستعمال خوارزمية اقليدس نجد:

$$756 = 441 \times 1 + 315$$

$$441 = 315 \times 1 + 126$$

$$315 = 126 \times 2 + 63$$

$$126 = 63 \times 2 + 0$$

آخر باقي غير معدوم هو : 63 .

ومنه: $PGCD(756 ; 441) = 63$.

لجعل الكسر $\frac{756}{441}$ غير قابل للاختزال نقسم حديه على 63 :

$$\frac{756}{441} = \frac{756 \div 63}{441 \div 63} = \frac{12}{7}.$$

3) حساب D:

ومنه : $D = \frac{756}{441} + \frac{19}{21}$ $\quad D = \frac{12}{7} + \frac{19}{21} = \frac{12 \times 3 + 19}{21} = \frac{55}{21}$

التمرين 14:

1) بقسمة حدي الكسر على 10 نجد : $\frac{180}{210} = \frac{18}{21}$

بالقسمة على 3 نجد: $\frac{18}{21} = \frac{6}{7}$.

بقسمة حدي الكسر على 5 نجد: $\frac{240}{105} = \frac{48}{21}$

بالقسمة على 3 نجد : $\frac{48}{21} = \frac{16}{7}$.

2) نحسب $PGCD(4862 ; 2145)$ باستعمال خوارزمية اقليدس:

$$4862 = 2145 \times 2 + 572$$
$$2145 = 572 \times 3 + 429$$
$$572 = 429 \times 1 + 143$$
$$429 = 143 \times 3 + 0$$

ومنه: $PGCD(4862 ; 2145) = 143$

ومنه: بقسمة حدي الكسر $\frac{4862}{2145}$ عل 143 نحصل على:

$$\frac{4862}{2145} = \frac{4862 \div 143}{2145 \div 143} = \frac{34}{15}$$

$\frac{34}{15}$ هو كسر غير قابل للاختزال.

نحسب $PGCD(3450 ; 759)$ باستعمال خوارزمية اقليدس:

$$3450 = 759 \times 4 + 414$$
$$759 = 414 \times 1 + 345$$
$$414 = 345 \times 1 + 69$$
$$345 = 69 \times 5 + 0$$

ومنه : $PGCD(3450 ; 759) = 69$.

ومنه، وبقسمة حدي الكسر $\frac{3450}{759}$ على 69 نحصل على كسر غير قابل للاختزال:

$$\frac{3450}{759} = \frac{3450 \div 69}{759 \div 69} = \frac{50}{11} .$$

التمرين 15:

القطع مربعة الشكل ، طول ضلع المربع هو قاسم مشترك للعددين 99 و 55 .

القواسم المشتركة للعددين 99 و 55 هما: 1 و 11 ، أكبرهما هو 11 .

ومنه : طول ضلع المربع هو : 11 cm .

$99 \div 11 = 9$ ، $55 \div 11 = 5$.

ومنه : توجد 9 قطع على الطول ، و 5 قطع على العرض.

وبالتالي: نحصل على 45 قطعة $(9 \times 5 = 45)$.

التمرين 16:

1) لكي تكون المسافة الفاصلة بين عمودين (بالمتر) عدد طبيعي أكبر من 2 ، يجب أن نختار قاسم مشترك للعددين 135 و 39 ويكون أكبر من 2 .

لدينا: $39 = 3 \times 13$ ، $135 = 3 \times 5 \times 9$.

ومنه: القواسم المشتركة للعددين 135 و 39 هما 1 و 3 .

3 هو القاسم المشترك الوحيد (الأكبر من 2) للعددين 135 و 39 .

2) لدينا: $135 \div 3 = 45$ ، $39 \div 3 = 13$.

ومنه: عدد الأعمدة هو: $(45+13) \times 2 = 58 \times 2 = 116$.

التمرين 17:

لدينا: $5{,}18 \text{ m} = 518 \text{ cm}$ و $1{,}85 \text{ m} = 185 \text{ cm}$.

لكي يكون عدد البلاطات أكبر ما يمكن ، يجب أن يكون طول ضلع المربع هو PGCD(518 ; 185) .

نحسب PGCD(518 ; 185) باستعمال خوارزمية اقليدس:

$$518 = 185 \times 2 + 148$$

$$185 = 148 \times 1 + 37$$

$$148 = 37 \times 4 + 0$$

آخر باقي غير معدوم هو 37 ، ومنه: PGCD (518 ; 185) =37 .

وبالتالي : طول ضلع المربع (البلاطة) هو 37 cm .

التمرين 18:

1) أكبر عدد ممكن من الفرق التي يمكن تشكيلها هو القاسم المشترك الأكبر لعدد التلاميذ وعدد التلميذات:

نحسب PGCD (294 ; 210) باستعمال خوارزمية اقليدس:

$$294 = 210 \times 1 + 84$$

$$210 = 84 \times 2 + 42$$

$$84 = 42 \times 2 + 0$$

ومنه: PGCD (294 ; 210) = 42 (آخر باقي غير معدوم).

إذا عدد الفرق هو 42 فريق.

2) أ) $294 \div 42 = 7$ ، ومنه 7 هو عدد التلاميذ في كل فريق.

ب) $210 \div 42 = 5$ ، ومنه : 5 هو عدد التلميذات في كل فريق.

التمرين 19:

نحسب باستعمال خوارزمية اقليدس PGCD (315 ; 42) :

$$315 = 42 \times 7 + 21$$

$$42 = 21 \times 2 + 0$$

ومنه: PGCD (315 ; 42) = 21 .

لاحظ أن مجموعة قواسم 21 هي { 1,3,7,21 } .

إذا، يمكننا تشكيل: 21 مجموعة ، كل مجموعة بها:

15 تلميذ ($15 = 21 \div 315$) و 2 موظفين ($2 = 21 \div 42$).

أو 7 مجموعات كل مجموعة بها:

45 تلميذ ($45 = 7 \div 315$) و 6 موظفين ($6 = 7 \div 42$).

أو 3 مجموعات كل مجموعة بها:

105 تلميذ ($105 = 3 \div 315$) و 14 موظف ($14 = 3 \div 42$).

التمرين 20:

1) التاجر يريد استعمال كل المصابيح وكل البطاريات.

إذا عدد العلب هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 180 و 405 .

لنحسب PGCD (405 ; 180) باستعمال خوارزمية اقليدس:

$$405 = 180 \times 2 + 45$$

$$180 = 45 \times 4 + 0$$

ومنه: PGCD (405 ; 180) = 45 .

وبالتالي فالتاجر يستطيع تكوين 45 علبة .

2) ا) $\mathbf{4 = 45 \div 180}$ ، ومنه 4 هو عدد المصابيح في كل علبة.

ب) $\mathbf{9 = 45 \div 405}$ ، ومنه : 9 هو عدد البطاريات في كل علبة.

3) عدد بطاريات الغيار في كل علبة هو: $\mathbf{5 = 4 - 9}$.