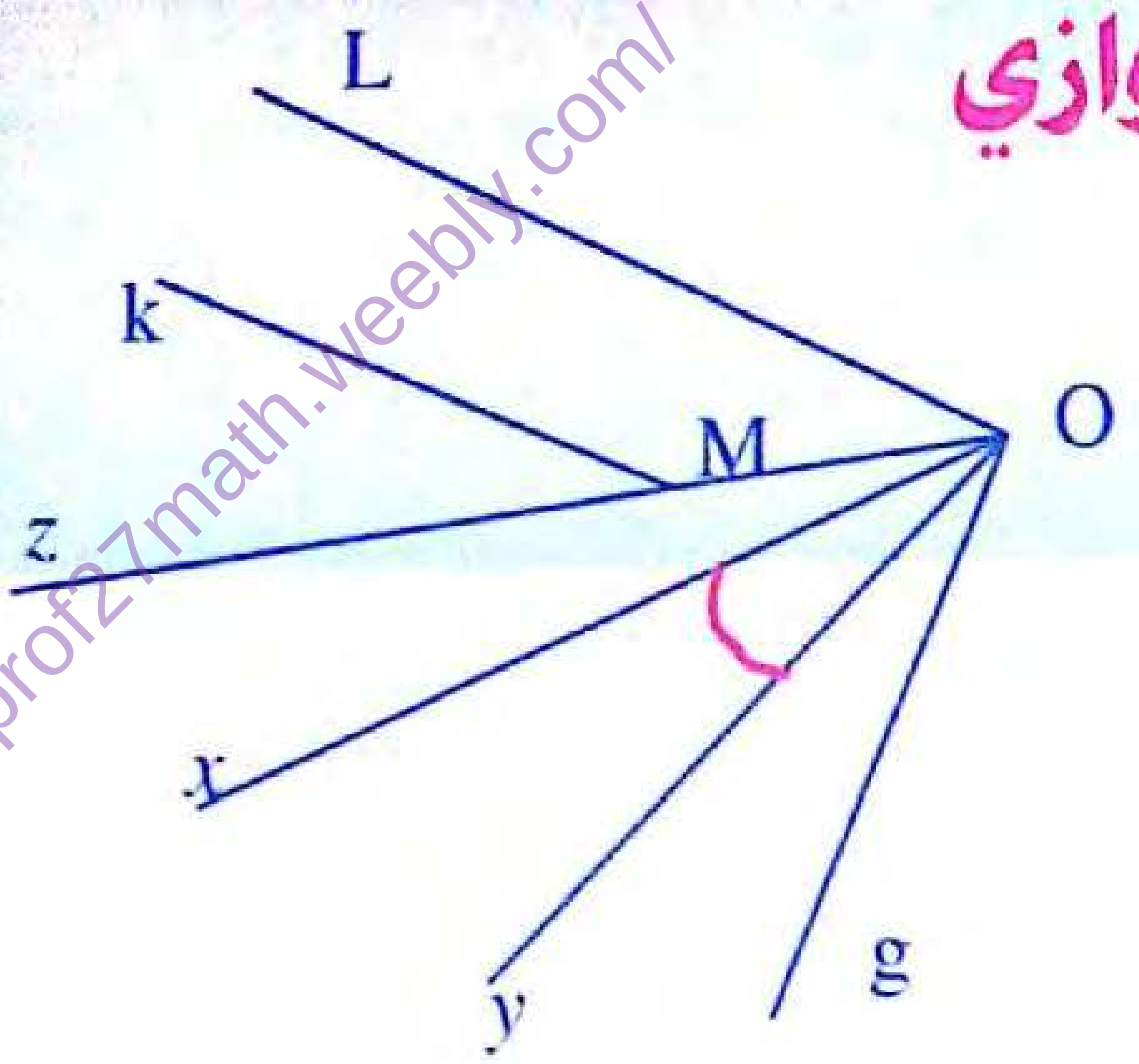
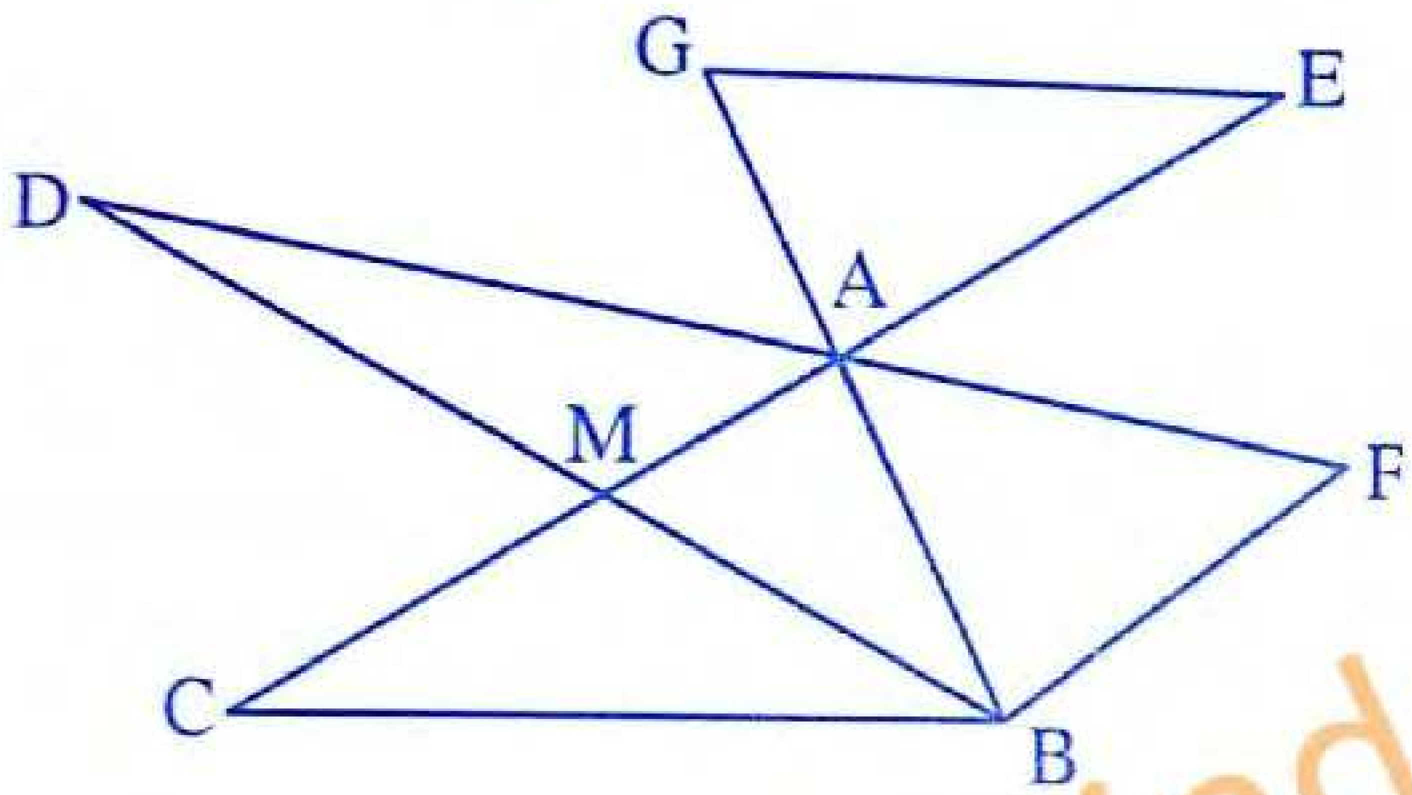
الزوايا والتوازي



التمرين 1

لاحظ الشكل المقابل .

1. ما هي الزوايا التي تجاور $(\widehat{xOy})$ ؟
2. هل توجد زاوية حادة تجاور $(\widehat{zMk})$ ؟



التمرين 2

لاحظ الشكل المقابل .

1. اذكر كل زاويتين متقابلتين بالرأس.
2. اذكر الزوايا المجاورة لـ $(\widehat{ABF})$

التمرين 3

إليك أقياس بعض الزوايا :

$78°$ ، $105°$ ، $15°$ ، $10°$ ، $12°$ ، $80°$ ، $18°$ ، $65°$ ، $135°$ ، $25°$
، $45°$ ، $162°$ ، $165°$ ، $75°$

1. اكتب جميع الثنائيات التي تمثل قيسا زاويتين متتامتين .
2. اكتب جميع الثنائيات التي تمثل قيسا زاويتين متكاملتين .

التمرين 4

b ، a قيسان لزاويتين متتامتين ، انقل الجدول الآتي ثمّ أتممه .

a	89°		50°		20°
b		85°		90°	

التمرين 5

b ، a قيسان لزاويتين متكاملتين ، انقل الجدول الآتي ثمّ أتممه .

A			90°		120°
b	115°	55°		180°	

التمرين 6

$(x + 15)$ هو قيس زاوية بالدرجات، أوجد x في كل من الحالات الآتية:

❶ $(x + 15)$ متممة لزاوية قيسها : $55°$ ثم $14°$

❷ $(x + 15)$ مكملة لزاوية قيسها : $90°$ ثم $144°$

التمرين 7

$(\widehat{xOy})$ و $(\widehat{yOz})$ زاويتان متجاورتان ومتكاملتان.

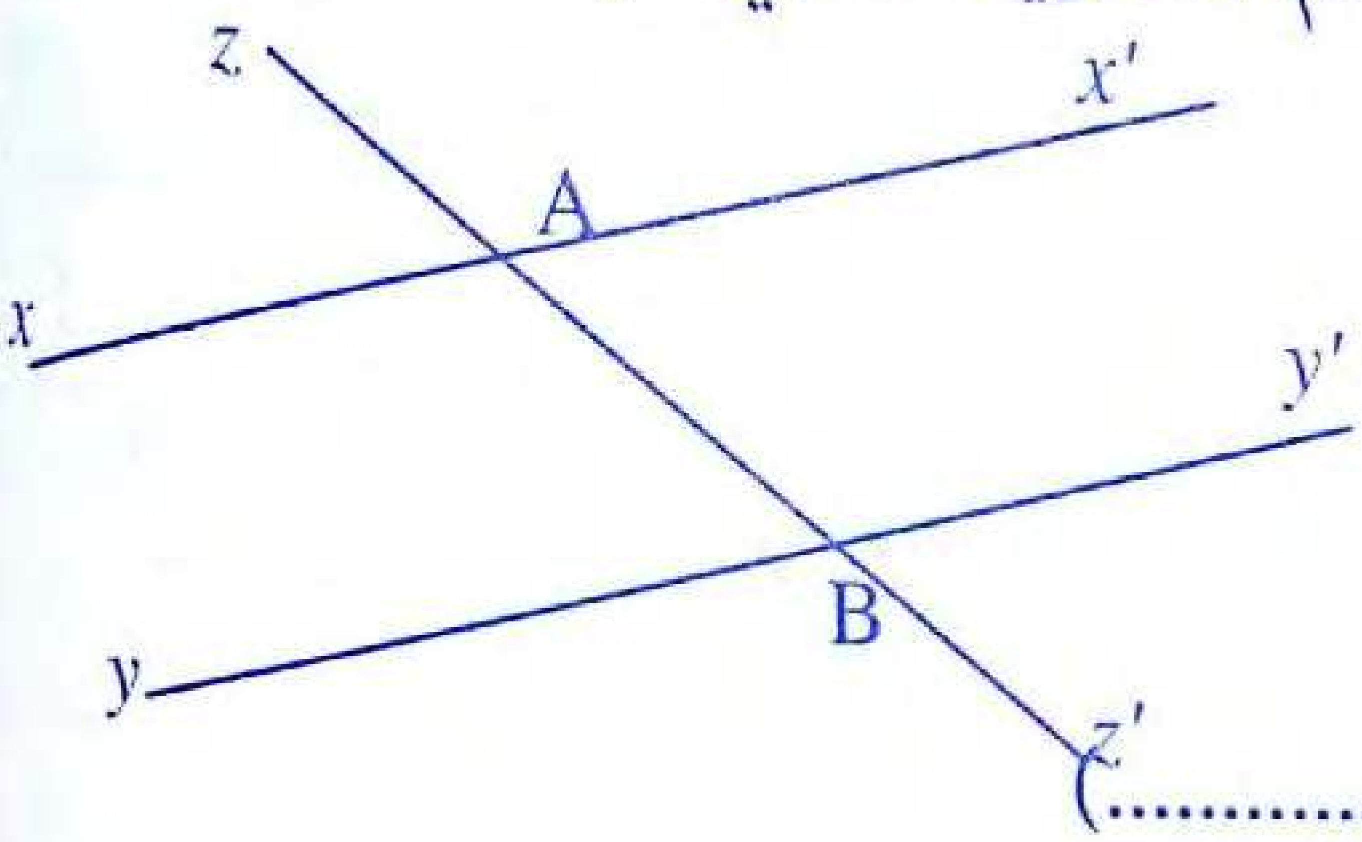
$[Om)$ و $[On')$ منصّفاهما على الترتيب.

❶ أرسم شكلا يترجم هذه المعطيات.

❷ برهن أنّ $[Om)$ و $[On')$ متعامدان.

التمرين 8

❶ ارسم مثيلاً للشكل المقابل ، ثمّ أتمم المساوايات التي تليه .



$(xx') // (yy')$ و (zz') قاطع

لهما في A و B على الترتيب .

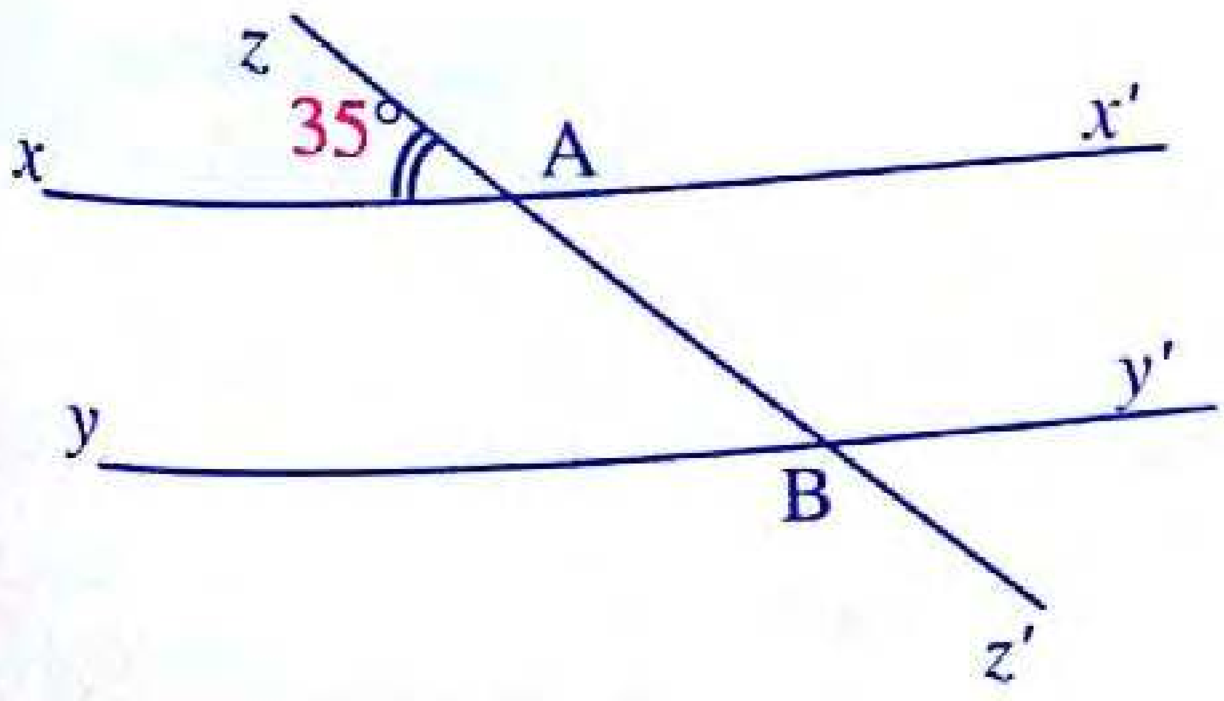
❷ برّر صحّة المساويات الآتية :

- $\widehat{xAB} = \widehat{y'BA}$ (لأنّ : ....)
- $\widehat{zAx'} = \widehat{y'BA}$ (لأنّ : ....)
- $\widehat{xAz} = \widehat{y'Bz'}$ (لأنّ : ....)

❸ أتمم المساواتين الآتيتين :

- $\widehat{xAB} + \widehat{yBA} = \cdots$
- $\widehat{xAZ} + \widehat{yBz'} = \cdots$

التمرين 9



❶ ارسم مثيلاً للشكل المقابل حيث :

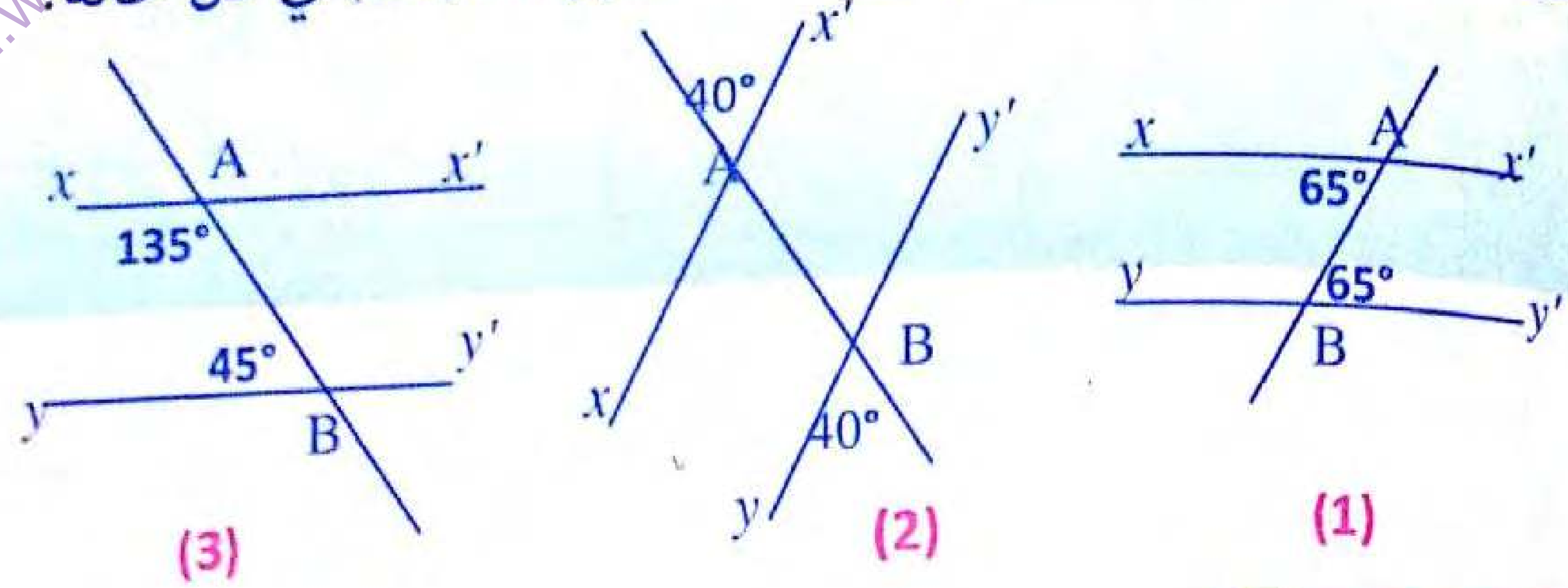
$(xx') // (yy')$ و (zz') قاطع

في A و B على الترتيب .

❷ احسب قيس كل زاوية رأسها B .

التمرين 10

لاحظ الأشكال الآتية جيّداً ، ثمّ بيّن لماذا $(xx') // (yy')$ في كل حالة؟



التمرين 11

a ، b هما قيسان لزاويتين لهما نفس القيس ، ما هي قيمة كل من a ، b في الحالات الآتية :

❶ إذا كانتا متتامتين .

❷ إذا كانتا متكاملتين .

❸ إذا كان مجموع قيسيهما $110°$.

التمرين 12

EFGH متوازي أضلاع ، منصّف الزاوية $(\widehat{EFG})$ يقطع (CD) في A.

1) ارسم شكلا يترجم هذه المعطيات .

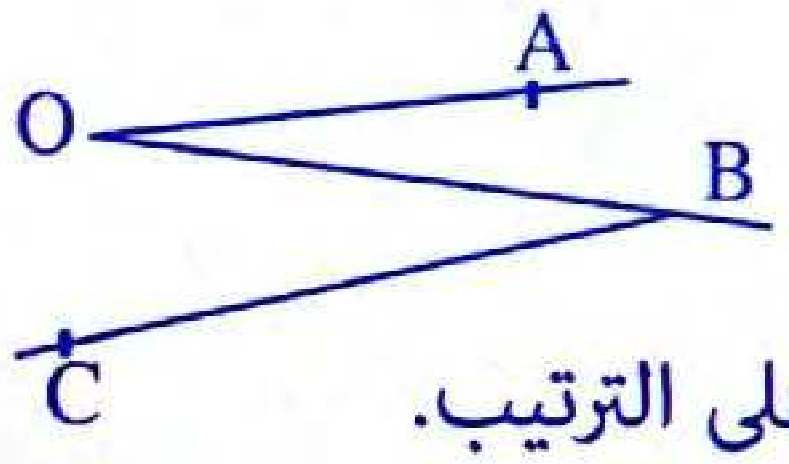
❷ برهن أنّ المثلث GAF متساوي الساقين في G .

التمرين 13

❶ أوجد العدد x بحيث يكون العدد $(90 - x)$ قيسا بالدرجات مساويا لكل من القيسين : $25°$ ، $45°$.

❷ أوجد العدد x بحيث يكون العدد $(180 - x)$ قيسا بالدرجات مساويا لكل من القيسين : $135°$ ، $95°$.

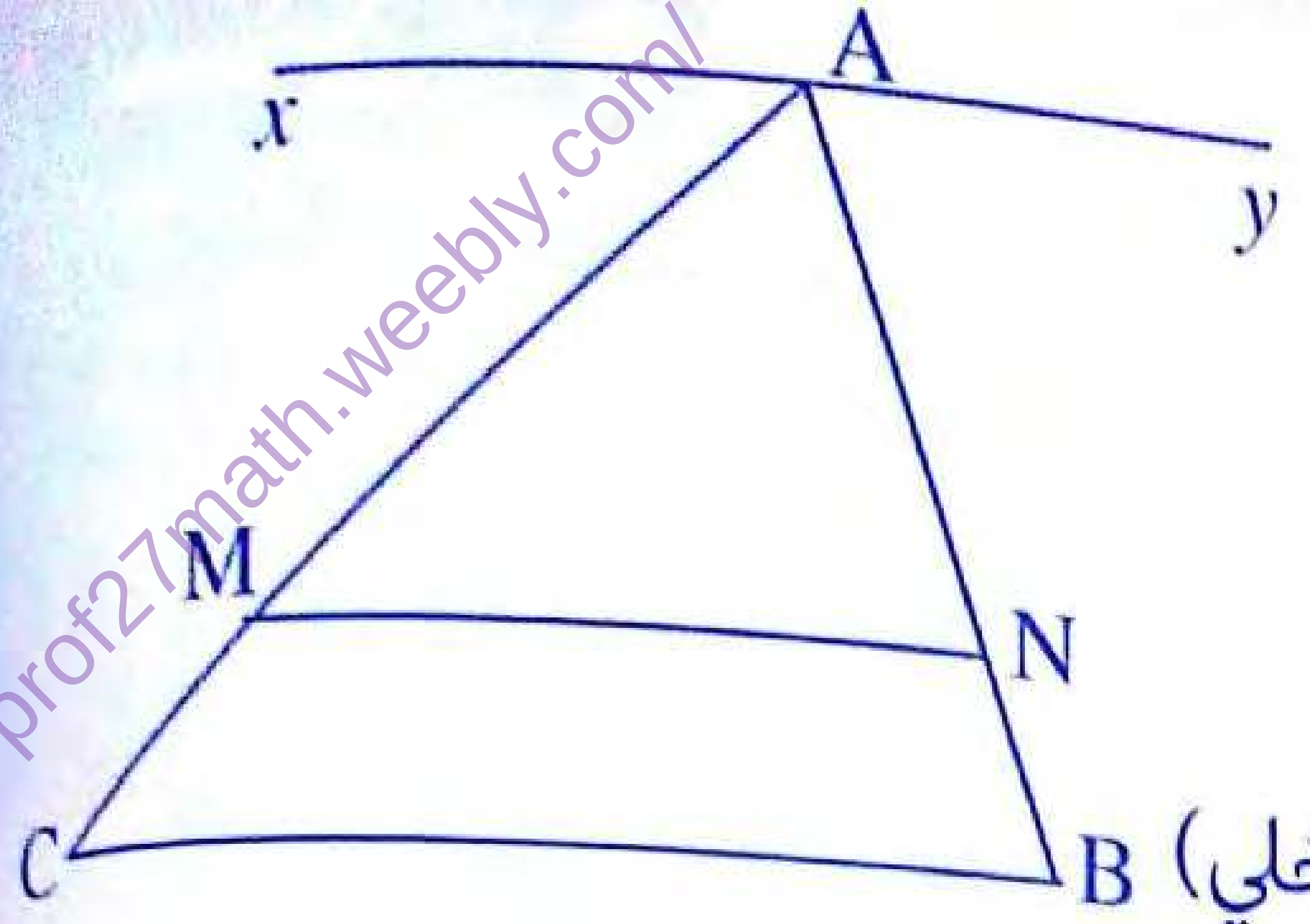
التمرين 14



❶ ارسم مثيلا للشكل المقابل .

❷ انشيء الزاويتين $\widehat{AOx}$ و $\widehat{CBy}$ المجاورتين والمتممتين للزاويتين $\widehat{AOB}$ و $\widehat{OBC}$ على الترتيب.

❸ بيّن أنّ $(Ox) // (Oy)$



التمرين 15

في الشكل المقابل $(BC) // (MN)$،

❶ أكمل ما يلي:

$\widehat{AMN} = ...$ (بالتماثل)

$\widehat{AMN} = ...$ (بالتبادل الداخلي)

$\widehat{ABC} = ...$ (بالتماثل)

$\widehat{AMC} = ...$ (بالتبادل الداخلي)

❷ أحسب $(\widehat{BAC})$ إذا علمت أنّ $\widehat{AMN} = 40°$ و $\widehat{ABC} = 70°$

❸ في هذه الحالة، ما هي طبيعة كل من المثلثين ABC و AMN؟

التمرين 16

ABCD متوازي أضلاع حيث : $\widehat{ABC} = 110°$

❶ احسب $(\widehat{BAD})$.

❷ منصّفا الزاويتين $(\widehat{BAD})$ ، $(\widehat{ABC})$ يتقاطعان في M.

برهن أنّ المثلث ABM قائم ، حدّد الزاوية القائمة .

التمرين 17

EFG مثلث حيث: FG = 8cm

منصّفا الزاويتين $(\widehat{EFG})$ و $(\widehat{EGF})$ يتقاطعان في M .

المستقيم الذي يشمل M ويوازي (EF) يقطع (FG) في A,

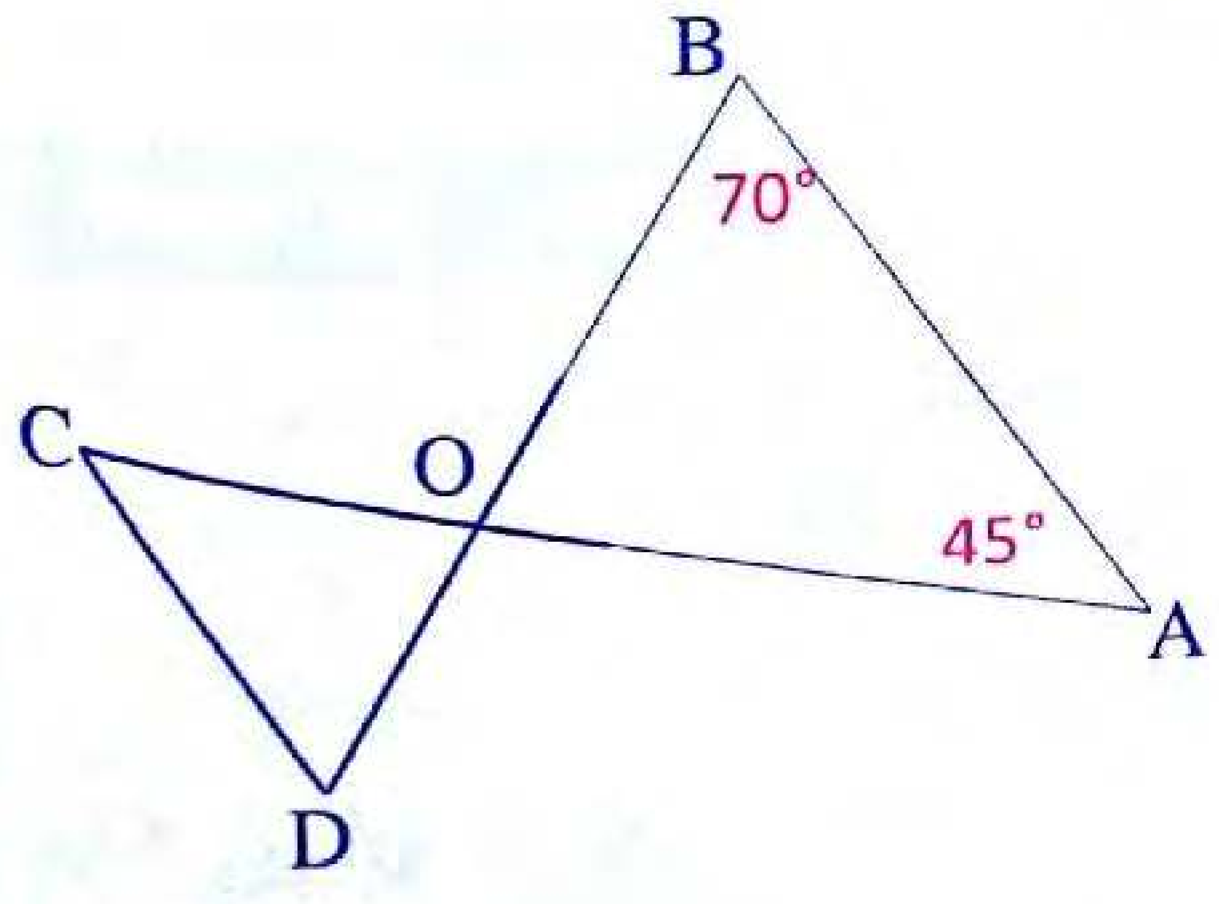
المستقيم الذي يشمل M ويوازي (EG) يقطع (FG) في B,

❶ ارسم شكلا يترجم هذه المعطيات .

❷ برهن أن كل من المثلثين MAF و MBF متساوي الساقين .

❸ بيّن أنّ محيط المثلث MAB يساوي 8cm .

التمرين 18



في الشكل المقابل لدينا :

$(AB) // (CD)$

المطلوب :

❶ حساب $\widehat{AOB}$

❷ حساب أقياس زوايا المثلث OCD.

الحلول

التمرين 1

1 الزوايا التي تجاور الزاوية ($\widehat{xOy}$) هي :

$\widehat{zOL}$ و $\widehat{xOz}$ و $\widehat{yOg}$

2 لا توجد زاوية حادة تجاور الزاوية $(\widehat{xMk})$ ،

توجد زاوية منفرجة تجاور الزاوية $(\widehat{xMk})$ وهي : $(\widehat{kMO})$.

التمرين 2

1 الزوايا المتقابلة بالرأس هي:

$\widehat{DMC}$ و $\widehat{AMB}$ ؛ $\widehat{BMC}$ و $\widehat{AMD}$ ؛ $\widehat{BAC}$ و $\widehat{EAG}$

$\widehat{EAF}$ و $\widehat{DAC}$ ؛ $\widehat{DAG}$ و $\widehat{FAB}$ ؛ $\widehat{DAF}$ و $\widehat{FAC}$

$\widehat{EAB}$ و $\widehat{GAC}$.

2 الزوايا المجاورة لـ $\widehat{ABF}$ هي: $\widehat{ABM}$ و $\widehat{ABC}$

التمرين 3

1 الثنائيات التي تمثل قيسا زاويتين متتامتين هي :

$(25° ; 65°)$ ؛ $(12° ; 78°)$ ؛ $(15° ; 75°)$ ؛ $(10° ; 80°)$

2 الثنائيات التي تمثل قيسا زاويتين متكاملتين هي :

$(135° ; 45°)$ ؛ $(162° ; 18°)$ ؛ $(75° ; 105°)$

التمرين 4

إتمام الجدول ، a و b متتامتان أي : $a + b = 90°$

a	89°	5°	50°	0°	20°
b	1°	85°	40°	90°	70°

التمرين 5

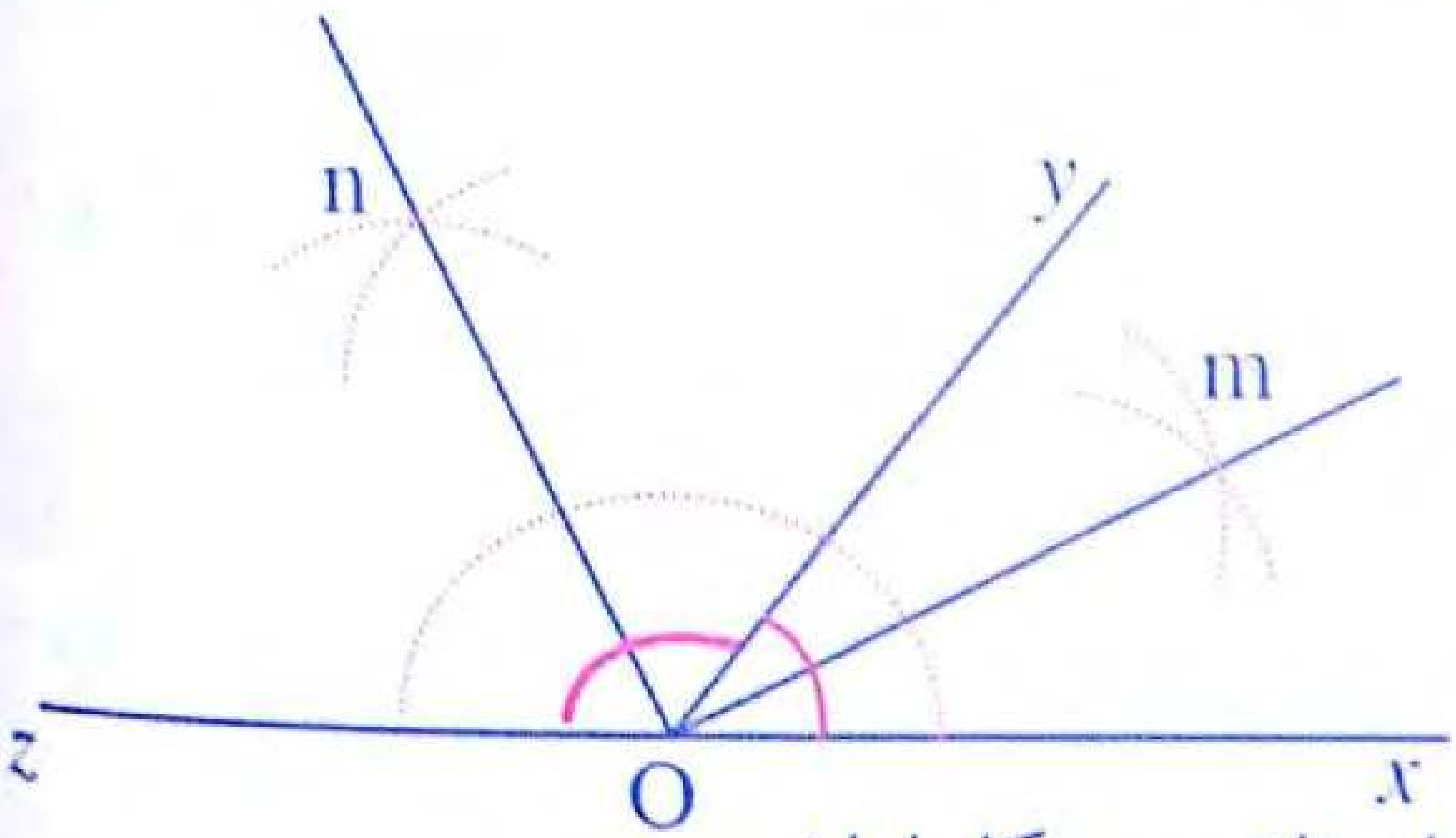
إتمام الجدول ، a و b متكاملتان أي : $a + b = 90°$

a	65°	125°	90°	0°	120°
b	115°	55°	90°	180°	60°

التمرين 6

- لدينا : $(x + 15°) + 55° = 90°$
أي : $x + 70° = 90°$ ومنه : $x = 90° - 70°$ ، أي : $x = 20°$.
- لدينا : $(x + 15°) + 14° = 90°$
أي : $x + 29° = 90°$ ومنه : $x = 90° - 29°$ ، أي : $x = 61°$.
- لدينا : $(x + 15°) + 90° = 180°$
ي: $x + 105° = 180°$ ومنه : $x = 180° - 105°$ ، أي : $x = 75°$.
- لدينا : $(x + 15°) + 144° = 180°$
ي : $x + 159° = 180°$ ومنه : $x = 180° - 159°$ ، أي : $x = 21°$

التمرين 7



❶ رسم الشكل حسب المعطيات.

❷ نبرهن أنّ $[On] \perp (Om)$

البرهان :

$(\widehat{xOy})$ و $(\widehat{yOz})$ زاويتان متجاورتان و متكاملتان يعني:

$\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180°$

- بما أنّ $[Om)$ منصّف $\widehat{xOy}$ فإنّ : $\widehat{xOm} = \widehat{mOy}$
- بما أنّ $[On)$ منصّف $\widehat{yOz}$ فإنّ : $\widehat{nOz} = \widehat{yOn}$

الزاويتان $\widehat{xOy}$ و $\widehat{yO}$ متجاورتان و متكاملتان يعني:

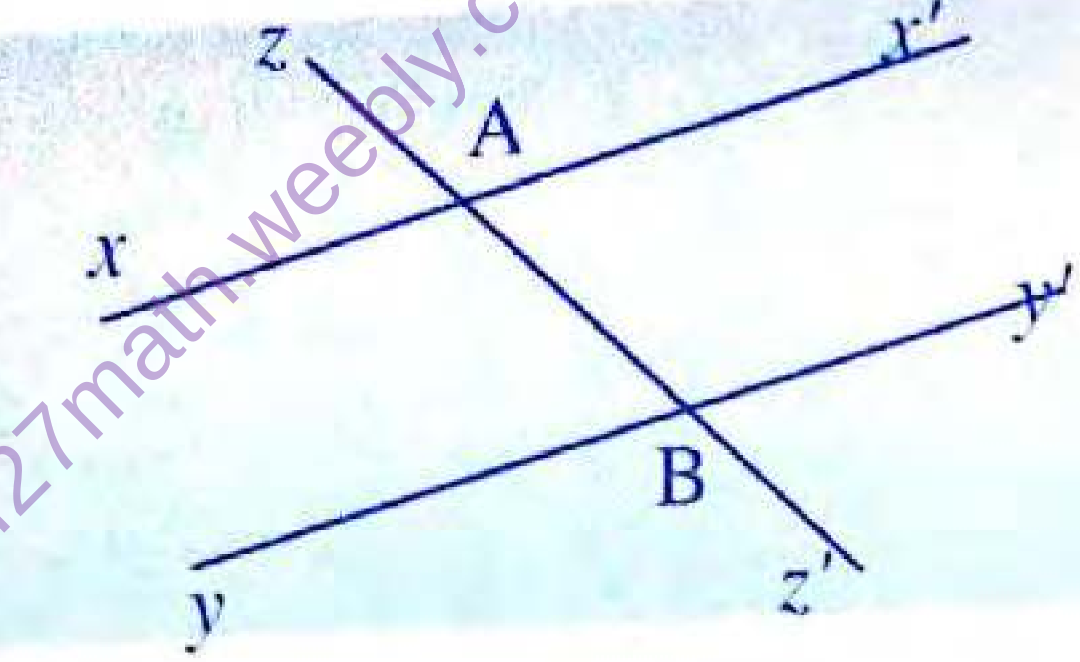
$\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180°$ أي: $\frac{\widehat{xOy}}{2} + \frac{\widehat{yOz}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$

منه : $\widehat{mOy} + \widehat{yOn} = 90°$ أي: $\widehat{mOn} = 90°$

إذن: $[On] \perp (Om)$

نتيجة: منصّفا زاويتين متجاورتين ومتكاملتين متعامدان

التمرين 8



1 رسم مثيل للشكل .

2 ■ $\widehat{xAB} = \widehat{y'BA}$ لأنهما متبادلتان داخلياً بالنسبة للمتوازيين (xx') و (yy') و القاطع (zz') .

■ $\widehat{zAx'} = \widehat{y'BA}$ لأنّهما متماثلتان لنفس المتوازيين ونفس القاطع .

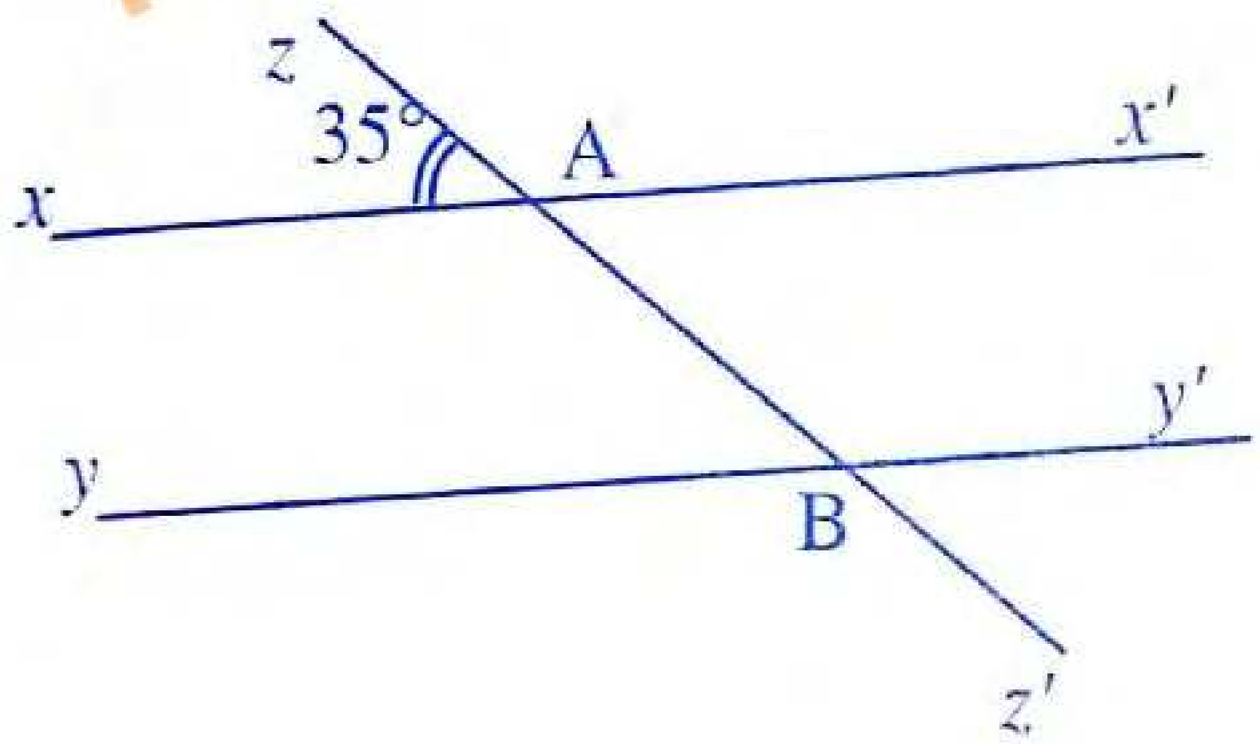
■ $\widehat{xAz} = \widehat{y'Bz'}$ لأنهما متبادلتان خارجياً لنفس السبب .

3 إتمام المساواتين .

■ $\widehat{xAB} + \widehat{yBA} = 180°$

■ $\widehat{xAz} + \widehat{yBz'} = 180°$

التمرين 9



1 رسم مثيل للشكل .

2 حساب قيس كل زاوية رأسها A

بما أنّ $(yy') // (xx')$ و (zz')

قاطع لهما في A و B ، إذن :

$\widehat{xAz} = \widehat{ABy}$ بالتماثل ,

بما أنّ : $\widehat{xAz} = 35°$ ومنه : $\widehat{ABy} = \widehat{z'By'} = 35°$

لدينا: $\widehat{ABy} + \widehat{yBz'} = 180°$ أي : $35° + \widehat{yBz'} = 180°$

إذن : $\widehat{yBz'} = 180 - 35°$ ومنه : $\widehat{yBz'} = \widehat{y'Bz} = 145°$

التمرين 10

■ في الشكل (1) :

$(yy') // (xx')$ لأنّ : $x\hat{A}B = A\hat{B}y'$ وهما متبادلتين داخليا بالنسبة للمستقيمين (xx') و (yy') والقاطع (AB) .

■ في الشكل (2) :

$(yy') // (xx')$ لأنّ : $x\hat{A}B = A\hat{B}y'$ وهما متبادلتان خارجياً بالنسبة للمستقيمين (xx') و (yy') والقاطع (AB) .

■ في الشكل (3) : $\widehat{xAB}+\widehat{ABy}=130°+50°=180°$ وهما زاويتان
$(xx') // (yy')$ لأنّ : داخليتان وواقعتين في نفس الجهة بالنسبة للقاطع (AB) .

التمرين 11

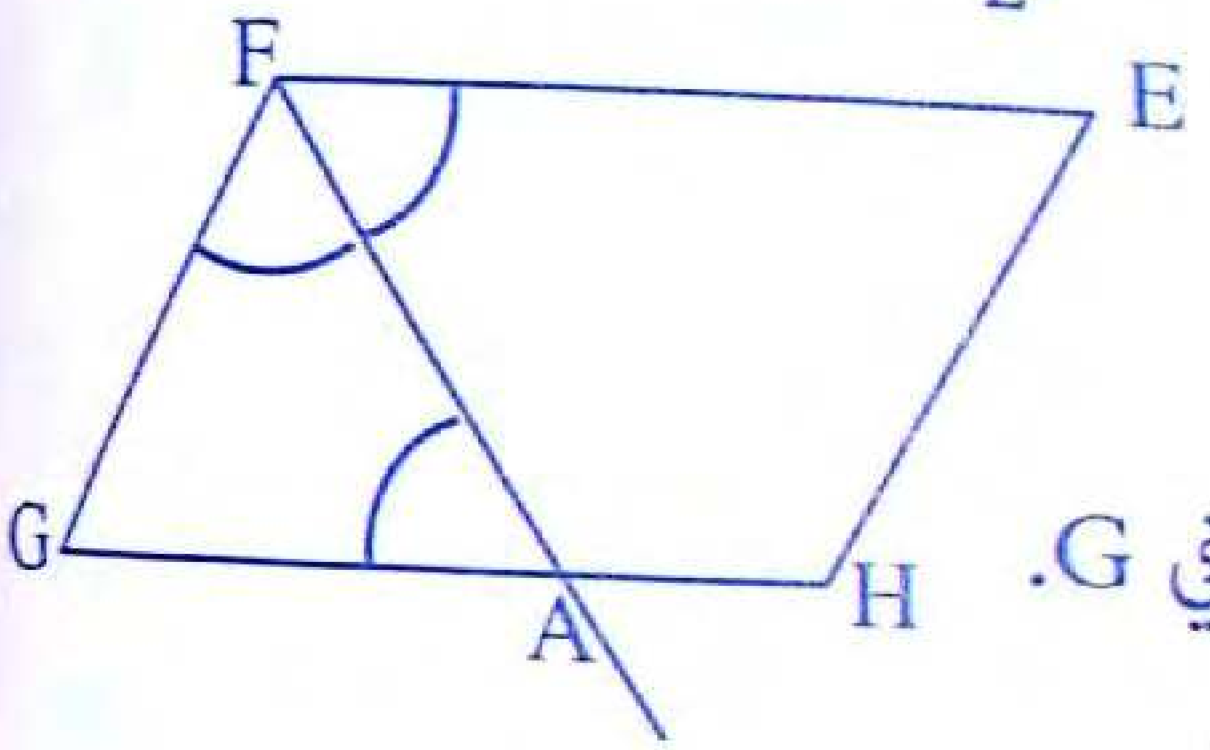
لدينا : a = b

❶ إذا كان : $a + b = 90°$ ، فإنّ : $a = b = \frac{90}{2} = 45°$.

❷ إذا كان : $a + b = 180°$ ، فإنّ : $a = b = \frac{180}{2} = 90°$.

❸ إذا كان : $a + b = 110°$ ، فإنّ : $a = b = \frac{110}{2} = 55°$.

التمرين 12



❶ رسم الشكل الذي يترجم المعطيات .

❷ نثبت أنّ المثلث GAF متساوي الساقين في G.

بما أنّ (GH) // (EF) و (AF) قاطع لهما ،

إذن : $\widehat{FAG} = \widehat{AFE}$ (بالتبادل الداخلي) .... ①

لكن : $\widehat{AFG} = \widehat{AFE}$ (لأنّ [BE] منصّف $(\widehat{EFG})$ .... ②

من ① و ② نستنتج أنّ : $\widehat{AFG} = \widehat{FAG}$

نستنتج أنّ المثلث GAF متساوي الساقين في G.

التمرين 13

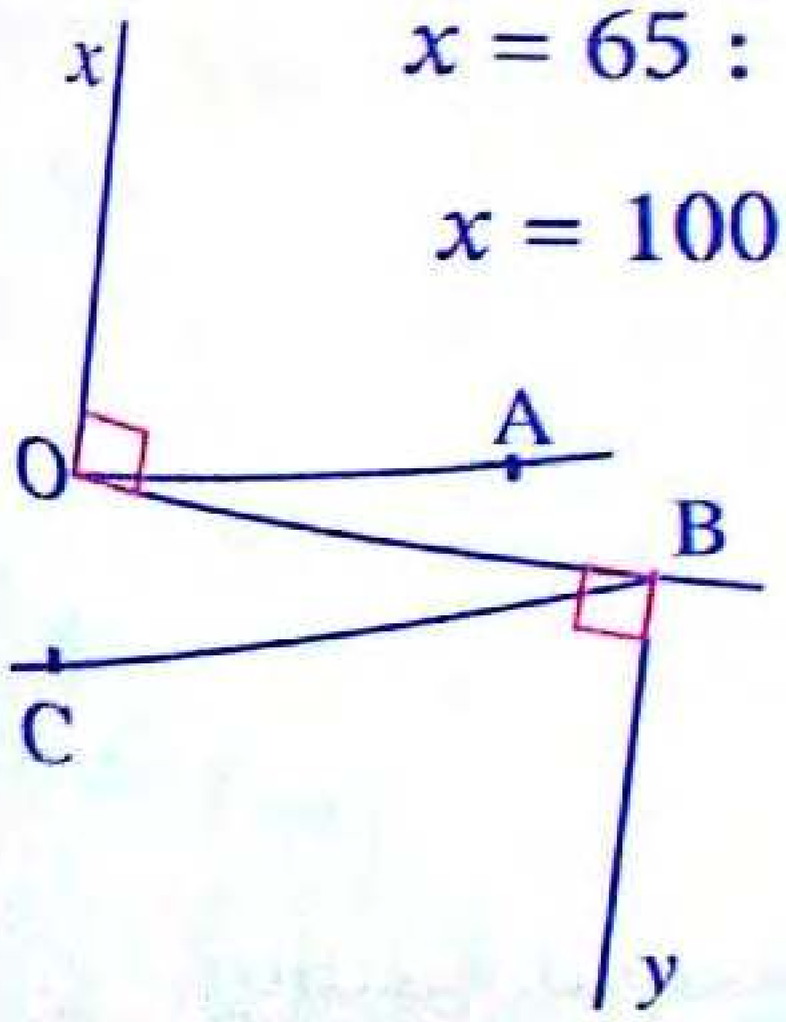
❶ ■ $90 - x = 70$ أي : $x = 90 - 70$ ومنه : $x = 20$

■ $90 - x = 65$ أي : $x = 90 - 65$ ومنه : $x = 25$

❷ ■ $180 - x = 115$ أي : $x = 180 - 115$ ومنه : $x = 65$

■ $180 - x = 80$ أي : $x = 180 - 80$ ومنه : $x = 100$

التمرين 14



❶ رسم مثيل للشكل .

❷ إنشاء الزاويتين $\widehat{AOx}$ و $\widehat{CBy}$

❸ نبيّن أنّ $(Ox) // (Oy)$

الزاوية $\widehat{AOx}$ مجاورة و متمّمة للزاوية $\widehat{AOB}$

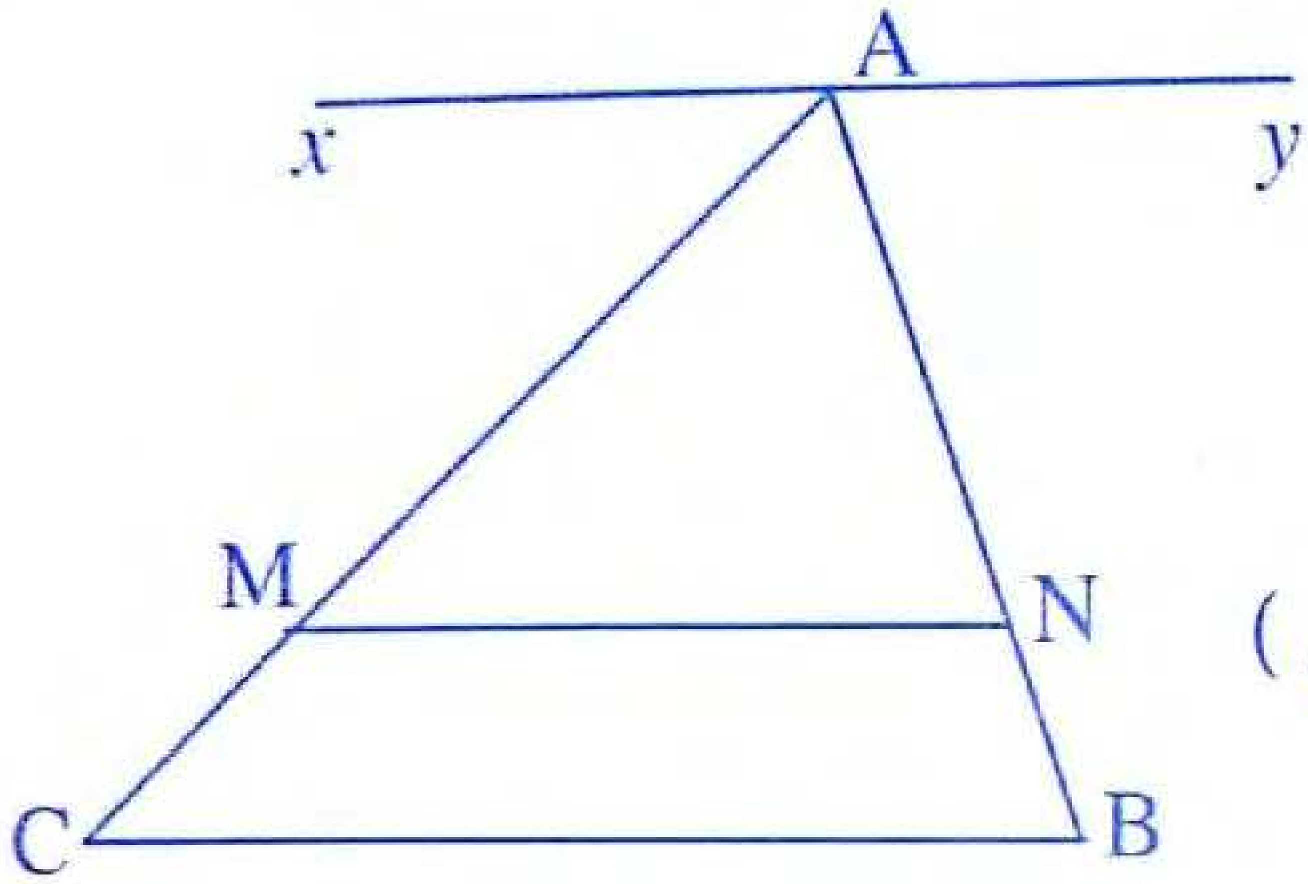
إذن : $\widehat{BOx} = 90°$ ومنه $(OB)\perp(Ox)$.

الزاوية $\widehat{CBy}$ مجاورة و متمّمة للزاوية $\widehat{OBC}$

إذن : $\widehat{OBy} = 90°$ ومنه $(OB)\perp(By)$.

لدينا : $(OB)\perp(Ox)$ و $(OB)\perp(By)$ ، إذن : $(Ox) // (Oy)$

التمرين 15



❶ إتمام المساويات

$\widehat{ACB} = \widehat{AMN}$ (بالتماثل)

$\widehat{xAM} = \widehat{AMN}$ (بالتبادل الداخلي)

$\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$ (بالتماثل)

$\widehat{yAN} = \widehat{ABC}$ (بالتبادل الداخلي)

❷ حساب $(\widehat{BAC})$ حيث : $\widehat{AMN} = 40°$ و $\widehat{ABC} = 70°$

في المثلث ABC لدينا:

$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$

أي: $\widehat{BAC} + 70° + 40° = 180°$ ومنه: $\widehat{BAC} = 180 - 110$

إذن: $\widehat{BAC} = 70°$

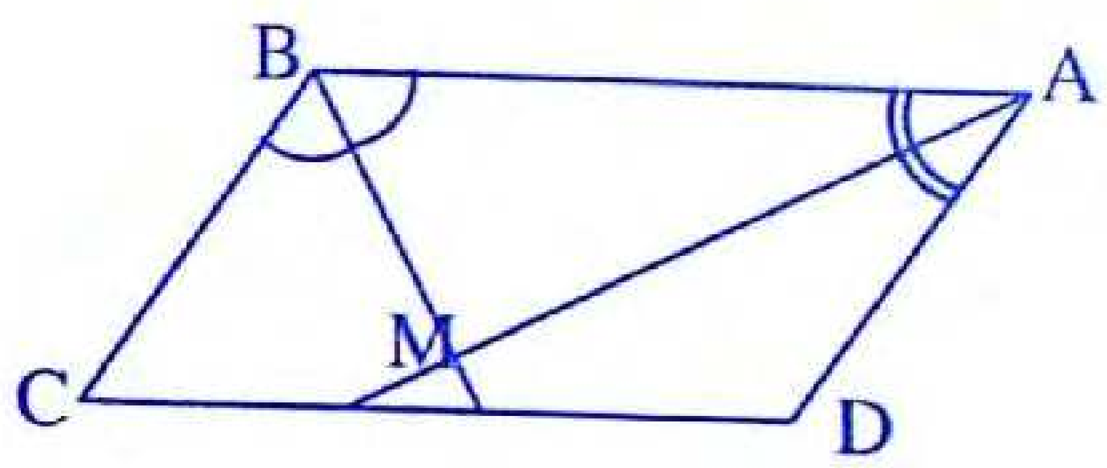
❸ ■ المثلث ABC فيه $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 70°$

إذن المثلث ABC متساوي الساقين في C

■ المثلث AMN فيه $\widehat{MAN} = \widehat{ANM} = 70°$

إذن المثلث AMN متساوي الساقين في C

التمرين 16



رسم الشكل حسب المعطيات .

❶ حساب $\widehat{BAD}$ حيث :

لدينا : $(AD) // (BC)$ و (AB) قاطع لهما،

إذن : $\hat{ABC} + \hat{BAD} = 180°$ ومنه : $110° + \hat{BAD} = 180°$

ومنه : $\hat{BAD} = 180° - 110°$ ، أي: $\hat{BAD} = 70°$

② نبيّن أنّ المثلث ABM قائم .

لدينا : $A\hat{B}C + B\hat{A}D = 180°$ ومنه : $\frac{A\hat{B}C}{2} + \frac{B\hat{A}D}{2} = \frac{180°}{2}$

لكن : $\frac{A\hat{B}C}{2} = A\hat{B}M = 55°$ و $\frac{B\hat{A}D}{2} = B\hat{A}M = 35°$

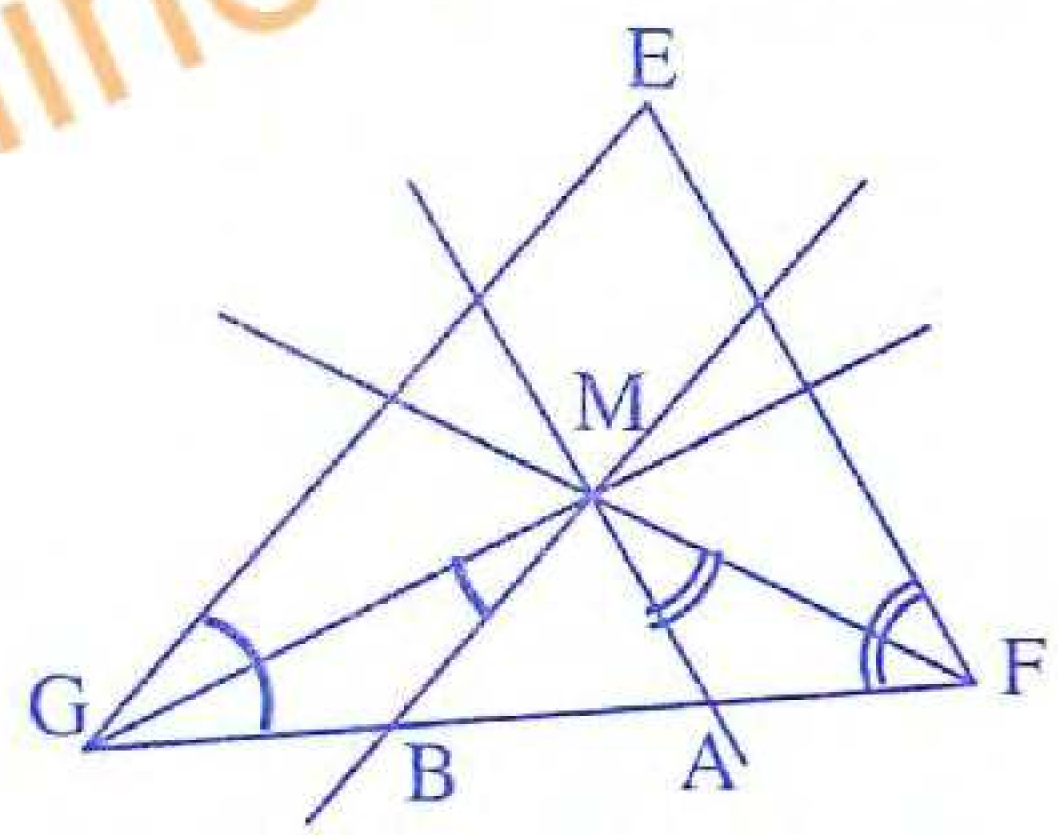
في المثلث ABM ، لدينا : $A\hat{B}M + B\hat{A}M + A\hat{M}B = 180°$

ومنه : $55° + 35° + A\hat{M}B = 180°$ ، أي : $A\hat{M}B = 90°$

إذن المثلث AMB قائم في M.

التمرين 17

① رسم الشكل حسب المعطيات .



بما أنّ (AM) // (EF) و (FM) قاطع لهما ،

إذن $\widehat{EFM} = \widehat{AMF}$ (بالتبادل الداخلي) .... ①

لكن $\widehat{AFM} = \widehat{EFM}$ (لأنّ [BE) منصّف $\widehat{ABC}$) .... ②

من ① و ② نستنتج أنّ : $\widehat{AFM} = \widehat{AMF}$

إذن المثلث AFM متساوي الساقين في A ، ومنه : AM = AF

و بنفس الكيفية نجد أن المثلث BGM متساوي الساقين في B.

أي : BM = BG .

③ نبيّن أنّ محيط المثلث MAB يساوي FG .

محيط المثلث MAB هي : P = BM + AM + AB .... ③

من جهة أخرى لدينا : FG = AF + AB + BG

أي : BC = AM + AB + BM ...... ④

من ③ و ④ نستنتج أنّ : $P = FG$

بما أنّ $FG = 8cm$ فإنّ: $P = 8cm$

التمرين 18

❶ حساب $(\widehat{AOB})$

في المثلث OAB لدينا: $\widehat{AOB} + \widehat{A} + \widehat{B} = 180°$

أي : $\widehat{AOB} + 45° + 70° = 180°$

$\widehat{AOB} + 115° = 180°$

ومنه: $\widehat{AOB} = 180° - 115°$ أي: $\widehat{AOB} = 65°$

❷ حساب أقياس زوايا المثلث OCD.

- حساب $(\widehat{COD})$

لدينا: $\widehat{COD} = \widehat{AOB}$ (باتقابل بالرّأس)

نستنتج أنّ: $\widehat{COD} = 65°$

- حساب $(\widehat{OCD})$

بما أنّ $(CD) // (AB)$ و (AC) قاطع لهما فإنّ :

$\widehat{OCD} = \widehat{OAB}$ ومنه : $\widehat{OAB} = 45°$

- حساب $(\widehat{ODC})$

بما أنّ $(CD) // (AB)$ و (BD) قاطع لهما فإنّ :

$\widehat{ODC} = \widehat{OBA}$ ومنه : $\widehat{OBA} = 70°$.