سلسلة

المفاتيح

كل برنامج

الرياضيات

في 355 تمرين

متوسط

تمارين وحلولها

مكتسبات

مايلزمك معرفته

إجراءات وتقنيات

إرشادات وتوجيهات

Filiale du groupe Hachette livre

سلسلة

المفاتيح

كل البرنامج في 355 تمرين

FODIL

السنة 3 من

التعليم المتوسط

موسعي بوزيد
مفتش ت. ت.أ

بلعباس سعد
مفتش ت. ت

Filiale du groupe Hachette-livre
17 bis, Chemin du réservoir - Hydra

- **الصفحة الثانية** فقد ضمّناها حلول التّمارين المقترحة وبعض الإرشادات والتوجيهات، فالحلول والإرشادات لا هي قريبة من التّمارين فتؤثر على التلميذ أثناء المحاولة فيها، ولا هي بعيدة تستدعي البحث عنها.

- جواب "الصحيح أم الخطأ".

عمليا، وقبل الشروع في المحاولة في التّمارين، نوصي بما يأتي :

- قراءة الكفاءة (أو الكفاءتين) المستهدفة وفهمها.
- قراءة المكتسبات واستذكار ما يتعلق بها.
- التأكد من معرفة المفاهيم المدرجة في فقرة ما يلزمك معرفته.

وعند الشروع في حل التّمارين ننصح بما يأتي:

- قراءة نص التّمرين كاملا، وفهمه، وتحديد المعطيات والمطلوب .
- ضبط خطة (استراتيجية) للحل، و تحديد مفتاح (أو مفاتيح) الحل.
- تنفيذ الخطة .
- مطابقة الحل المتوصل إليه مع الحل المقترح في البطاقة.

الفهرس

	الصفحة
المحور 1: العمليّات على الكسور	5
المحور 2: الأعداد النسبية	15
المحور 3: الأعداد الناطقة	19
المحور 4: القوى ذات أسس صحيحة نسبية	23
المحور 5: الحساب الحرفي	33
المحور 6: الحساب الحرفي " المعادلات والمتباينات"	37
المحور 7: التناسبية	45
المحور 8: تنظيم المعطيات	51
المحور 9: المثلّثات	61
المحور 10: المثلّث القائم والدّائرة	73
المحور 11: المثلّث القائم "خاصية فيثاغورس"	75
المحور 12: الدّائرة والمستقيم	79
المحور 13: جيب تمام زاويّة حادّة	81
المحور 14: الانسحاب	85
المحور 15: الهرم ومخروط الدّوران	91

العمليات على الكسور (1)

الكفاءات المستهدفة • تعيين مقلوب عدد غير معدوم.

مكتسبات

• حساب جداء كسرين

ما يلزمك معرفته

1 مقلوب عدد

إذا كان جداء عددين يساوي واحدا فإن كلّ منهما مقلوب الآخر.

$a \times b = 1$ معناه $[b = \frac{1}{a}$ أو $a = \frac{1}{b}]$

• a و b عددان غير معدومين.

مقلوب $\frac{a}{b}$ هو $\frac{b}{a}$

$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

• مقلوب العدد (غير المعدوم) x هو العدد $\frac{1}{x}$

$x \times \frac{1}{x} = 1$

ملاحظة

يكتب العدد $\frac{1}{x}$ بالشكل x^{-1} (ويقرأ x^{-1} ناقص واحد)

2 الآلة الحاسبة

في جل الحاسبات تمثل اللمسة التي تعطي مقلوب عدد x هي x^{-1} أو $\frac{1}{x}$

إجراءات وتقنيات

• أعداد كثيرة الاستعمال بشكليها الكسري والعشري: $\frac{1}{2} = 0,5$

$\frac{1}{5} = 0,2$ ، $\frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{3}{4} = 0,75$ ، $\frac{1}{8} = 0,125$

تمارين

1. أنجز العمليات الآتية.

$\frac{8}{3} \times \frac{3}{8}$ ، $5 \times \frac{1}{5}$ ، $4 \times 0,25$

2. أكمل ما يأتي.

$1 = \frac{4}{5} \times \ldots$ ، $1 = \ldots \times 0,3$

3. أكمل ما يأتي.

$\frac{2}{3}$ هو ... $\frac{2}{3}$ لأن $\ldots = \ldots \times \frac{2}{3}$

5 هو ... $\frac{1}{5}$ لأن ...

... هو ..... لأن $\ldots = 2,5 \times 0,4$

4. مستطيل مساحته $1\ m^2$، وطوله $2\ m$، احسب عرضه.

5. من بين الكسور الآتية، أي كسر هو مقلوب الكسر $\frac{7}{5}$ ؟

$\frac{7}{5}$ ، $\frac{21}{15}$ ، $\frac{5}{12}$ ، $\frac{5}{7}$ ، $\frac{7}{2}$.

6. بين أنّ كلاً من الأعداد الآتية هو مقلوب $\frac{8}{5}$.

$\frac{8}{1,6}$ ، $\frac{1}{\frac{8}{5}}$ ، $\frac{5}{8}$ ، $0,625$.

7. أوجد مقلوب كلّ مما يأتي.

8 ، 9 ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{7}$ ، 1 ، 0,125 ، $\frac{17}{31}$ ، $\frac{2,1}{1,4}$.

8. احسب كلاً مما يأتي.

$\frac{7}{5} \times \frac{5}{7}$ ، $2 \times 0,5$ ، $4 \times \frac{25}{100}$ ، $\frac{34}{28} \times \frac{14}{17}$ ، $\frac{4}{10} \times 2,5$ ، $\frac{14}{17} \times$

ماذا تستنتج ؟

9. باستعمال الآلة الحاسبة عين مقلوب كلّ عدد مما يأتي (أعط الناتج مدوّرا إ

6 ، 0,1 ، $\frac{314}{100}$ ، $\frac{71}{93}$ ، $\frac{756}{318}$.

صحيح أم خطأ ؟ مقلوب أي عدد أكبر من الواحد هو عدد أكبر من الواحد

حلول التمارين

1. $\frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = \frac{3 \times 8}{8 \times 3} = \frac{24}{24} = 1$

$5 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 1}{1 \times 5} = \frac{5}{5} = 1$

$4 \times 0,25 = 1$

2. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$ ، $0,3 \times \frac{10}{3} = 1$

3. $\frac{2}{3}$ هو مقلوب $\frac{3}{2}$ لأن $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$

5 هو مقلوب $\frac{1}{5}$ لأن $5 \times \frac{1}{5} = 1$

2,5 هو مقلوب 0,4 لأن $2,5 \times 0,4 = 1$

4. عرض المستطيل يساوي حاصل قسمة مساحته على طوله، وبالتالي العرض يساوي: $\frac{1}{2}$ m أي 0,5 m.

5. مقلوب الكسر $\frac{7}{5}$ هو $\frac{5}{7}$

6. $\frac{8}{5} \times \frac{1}{1,6} = \frac{8 \times 1}{5 \times 1,6} = \frac{8}{8} = 1$ ومنه $\frac{1}{1,6}$ هو مقلوب $\frac{8}{5}$

$\frac{1}{\left(\frac{8}{5}\right)} \times \left(\frac{8}{5}\right) = 1$ ومنه $\frac{1}{\frac{8}{5}}$ هو مقلوب $\frac{8}{5}$

$\frac{5}{8} \times \frac{8}{5} = 1$ ومنه $\frac{5}{8}$ هو مقلوب $\frac{8}{5}$

7. $0,625 \times \frac{8}{5} = \frac{0,625 \times 8}{5} = \frac{5}{5} = 1$ ومنه 0,625 هو مقلوب $\frac{8}{5}$

العدد	8	9	$\frac{1}{3}$	1	0,125	$\frac{17}{31}$	$\frac{2,1}{1,4}$
مقلوبه	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	3	1	$\frac{1}{0,125}$	$\frac{31}{17}$	$\frac{1,4}{2,1}$

8. ناتج كلّ عمليةٍ هو 1 ومنه كل عامل في الجداء هو مقلوب الآخر.

9. مقلوب 6 هو 0,17، مقلوب 0,1 هو 10، مقلوب $\frac{314}{100}$ هو 0,32، مقلوب $\frac{71}{93}$ هو 1,31، مقلوب $\frac{756}{318}$ هو 0,42.

إرشادات وتوجيهات

- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
- يمكن الاختزال قبل حساب الجداءات
$\frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = \frac{3 \times 8}{8 \times 3} = 1$
- إنّ $0,3 = \frac{3}{10}$
ومقلوب $\frac{3}{10}$ هو $\frac{10}{3}$
- مساحة المستطيل تساوي جداء طوله وعرضه.
- $2,5 = \frac{25}{10}$ و $0,4 = \frac{4}{10}$
و $\frac{4}{10} \times \frac{25}{10} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$
- مقلوب العدد (غير المعدوم X) هو العدد $\frac{1}{x}$
- لاحظ أنّ $\frac{1}{\left(\frac{8}{5}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{16}{10}\right)} = \frac{1}{1,6}$
- لحساب مقلوب $\frac{314}{100}$ باستعمال الحاسبة ندخل البرنامج:
(314 ÷ 100 =)

02 العمليات على الكسور (2)

الكفاءات المستهدفة

1) مقلوب جداء عاملين يساوي جداء مقلوبيهما.

2) مقلوب مجموع حدين لا يساوي مجموع مقلوبيهما.

مكتسبات

- تعيين مقلوب عدد غير معدوم.
- حساب جداء كسرين.

ما يلزمك معرفته

- مقلوب العدد (غير المعدوم) x يكتب $\frac{1}{x}$ ، ويكتب أيضا x^{-1}.
- $\frac{1}{a+b}$ مقلوب مجموع العددين a وb.
- $\frac{1}{a \times b}$ مقلوب جداء العددين a وb.

إجراءات وتقنيات

- ينبغي الانتباه عند استعمال آلات حاسبة وقيم تقريبية لمقلوب عدد.

مثل: تعطي الحاسبة ما يأتي:
مقلوب 7 بالشكل 0.1428571429
ومقلوب 3 بالشكل 0.3333333333
وبأخذ المدوّر إلى 0,01 نجد:
مقلوب 7 يساوي 0,14
مقلوب 3 يساوي 0,33
بما أنّ $\frac{1}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{21}$ ، فعند استعمالها لحساب مقلوب 21 نجده يساوي:
$0,14 \times 0,33 = 0,0462$
بينما تعطي الحاسبة مقلوب 21 بالشكل 0.0476190476
وبأخذ المدوّر إلى 0,0001 نجد:
مقلوب 21 يساوي 0,0476
وهو مختلف عن النتيجة السابقة.

وبالتالي عند العمل بقيم مقرّبة يستحسن تأجيل القيم المقرّبة حتى نهاية كلّ العمليات.

تمارين

1. العدد $\frac{1}{9 \times 17}$ هو مقلوب جداء العددين 9 و17. أكمل على هذا المنوال وباستعمال مصطلح "مقلوب" ما يأتي:

أ) العدد $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$ هو ...

ب) العدد $\frac{1}{5} \times \frac{1}{13}$ هو ...

ج) العدد $\frac{1}{13 \times 7}$ هو ...

2. أكمل ما يأتي.

- العدد $\left(\frac{11}{3} \times \frac{2}{7}\right)^{-1}$ هو ... جداء الكسرين ... و ...
- $\left(\frac{11}{3} \times \frac{2}{7}\right)^{-1} = (\quad)^{-1} = \quad$
- $\left(\frac{11}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \quad \times \quad = \quad$
- استنتج القاعدة: "مقلوب ... يساوي جداء" ...

3. أوجد مقلوب كلّ ممّا يأتي بطريقتين.

$\frac{5}{2} \times \frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{5} \times 6$ ، $\frac{0,1}{3} \times \frac{0,2}{7}$

4. اثبت أن: مقلوب جداء عاملين يساوي جداء مقلوبيهما.

5. a وb عددان غير معدومين، M وS عبارتان حيث:

$$M = \frac{1}{a+b} \quad \text{و} \quad S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

أ) عبّر عن كل من M وS لغويا بإكمال ما يأتي.

M هو مقلوب ...

S هو مجموع ...

ب) أحسب كلاّ من M وS في الحالتين الآتيتين:

1) $a = 7$ و $b = 14$ 2) $a = \frac{1}{3}$ و $b = \frac{1}{12}$

ج) هل مقلوب مجموع حدّين يساوي مجموع مقلوبيهما؟

صحيح أم خطأ؟ مقلوب أي عدد عشري هو عدد عشري.

حلول التمارين

1. أ) العدد $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$ هو جداء مقلوبي العددين 4 و 5.
ب) العدد $\frac{1}{7} \times \frac{1}{13}$ هو مجموع مقلوبي العددين 7 و 13.
ج) العدد $\frac{1}{13 \times 7}$ هو مقلوب مجموع العددين 7 و13.

2. العدد $\left(\frac{11}{3} \times \frac{2}{7}\right)^{-1}$ هو مقلوب جداء الكسرين $\frac{11}{3}$ و $\frac{2}{7}$.
- $\left(\frac{11}{3} \times \frac{2}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{22}{21}\right)^{-1} = \frac{21}{22}$
- $\left(\frac{11}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{3}{11} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{22}$

استنتج القاعدة: "مقلوب جداء عددين غير معدومين يساوي جداء مقلوبيهما".

3. الطريقة الأولى: $\left(\frac{5}{2} \times \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{5}$

الطريقة الثانية: $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{5}$

الطريقة الأولى: $\left(\frac{1}{5} \times 6\right)^{-1} = \left(\frac{18}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{18}$

الطريقة الثانية: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \times (6)^{-1} = \frac{5}{1} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$

الطريقة الأولى: $\left(\frac{0.1}{3} \times \frac{0.2}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{0.02}{21}\right)^{-1} = \frac{21}{0.02} = 1050$

الطريقة الثانية: $\left(\frac{0.1}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{0.2}{7}\right)^{-1} = \frac{3}{0.1} \times \frac{7}{0.2} = \frac{21}{0.02} = 1050$

4. نفرض أنّ a و b عددين غير معدومين. ونبيّن أنّ: $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{a \times b}$
إنّ مقلوب جدائهما هو $\frac{1}{a \times b}$ وجداء مقلوبيهما هو $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$

لدينا: $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1 \times 1}{a \times b} = \frac{1}{a \times b}$

أي أنّ مقلوب جداء عاملين يساوي جداء مقلوبيهما.

5. M هو مقلوب مجموع العددين a و b. S هو مجموع مقلوبي العددين a و b
أ) 1) من أجل: $a = 7$ و $b = 14$ $\quad M = \frac{1}{21}$ (2 و $S = \frac{1}{14}$
ب) 2) من أجل: $a = \frac{1}{3}$ و $b = \frac{1}{12}$ $\quad M = \frac{12}{5}$ و $S = 15$
ج) مقلوب مجموع حدّين لا يساوي مجموع مقلوبيهما

الإجابة خطأ. خذ مثلا العدد 3.

إرشادات وتوجيهات

- ينبغي التمييز بين مقلوب مجموع عددين ومجموع مقلوبي عددين.
- مجموع مقلوبي العددين 7 و13 لا يساوي مقلوب مجموع العددين 7 و13.
- مقلوب جداء العددين 4 و5 يساوي جداء مقلوبي العددين 4 و5.
- العدد المعدوم ليس له مقلوب.
- في الطريقة الأولى نحسب الجداء ثم نجد المقلوب.
- في الطريقة الثانية نجد مقلوب كلّ عامل في الجداء، ثم نحسب الجداء الناتج.
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$

الكفاءات المستهدفة : قسمة كسور

تمارين

1. احسب العمليات الآتية (اختزل إن أمكن)

2. احسب كلا مما يأتي (اختزل إن أمكن)

3. أكمل الجدول الآتي

×				
				1

4. احسب كلا مما يأتي (اختزل إن أمكن)

5. اقتسم إخ مع إخوته الثلاثة تركة، ولما كان نصيبه يمثل $\frac{2}{5}$ من التركة، فقد حصل على 2500 دج، ما هو مبلغ التركة التي اقتسمها هؤلاء الإخوة؟

6. جنى العم إبراهيم مربي النحل 12 لترا من العسل، ويريد أن يضعها في علب سعة كل منها $\frac{1}{4}$ ل، ما عدد العلب الذي سيستعملها العم إبراهيم

حلول التمارين

1. أ) $\frac{1}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{1 \times 4}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$ ، $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{1} = 3$ ، $\frac{1}{4} \div \frac{1}{7} = \frac{7}{4}$ ، $\frac{12}{7} \div \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \times \frac{14}{24} = \frac{14}{14}$ ، $\frac{12}{14} \div \frac{12}{14} = \frac{12}{14} \times \frac{14}{12} = 1$

$\frac{12,5}{5} \div \frac{1}{2} = 2,5 \times 2 = 5$

ب) $405 \div \frac{27}{32} = 400 \times \frac{32}{27} = 15 \times 32 = 480$ ، $18 \div \frac{6}{5} = 18 \times \frac{5}{6} = 3 \times 5 = 15$

$10,8 \div \frac{9}{5} = 10,8 \times \frac{5}{9} = 6$

ج) $\frac{35}{156} \div 12 = \frac{35}{13}$ ، $\frac{14}{3} \div 14 = \frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{7} \div 2,5 = \frac{2}{7}$

2. $a = \frac{\frac{4}{5}}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$ ، $b = \frac{4}{\frac{5}{3}} = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$

$c = \frac{\frac{14}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{14}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{2 \times 7 \times 3}{3 \times 3 \times 2 \times 4} = \frac{7}{12}$

$d = \frac{7,2}{\frac{3}{4}} = 7,2 \times \frac{4}{3} = \frac{3 \times 2,4 \times 4}{3} = 2,4 \times 4 = 9,6$

3.

$\div$	$\frac{2}{5}$	$\frac{28}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{35}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{14}{3}$	1
4	10	$\frac{9}{7}$	8	$\frac{12}{7}$
0,5	$\frac{2,5}{2}$	$\frac{4,50}{28}$	1	$\frac{1,5}{7}$

4. $a = \frac{1 \times \frac{4}{7}}{3} = \frac{\frac{7+4}{7}}{3} = \frac{\frac{11}{7}}{3} = \frac{11}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{21}$

وبالمثل نجد $b = \frac{23}{12}$ و $c = \frac{280}{81}$ و $d = \frac{9}{20}$.

5. يمكن حلّ التمرين بإكمال جدول تناسبية

نصيب هذا الأخ	2	25 876
المبلغ	5	x

ومنه $x = 25876 \times \frac{5}{2}$ أي $x = 64690$

ومبلغ التّركة التي اقتسمها الإخوة يساوي 64690 DA.

6. للبحث عن عدد العلب نجري العملية: $24 \div \frac{3}{4}$

لدينا $24 \div \frac{3}{4} = 24 \times \frac{4}{3} = 32$.

بالتّالي فإنّ عدد العلب التي سيستعملها العمّ إبراهيم يساوي 32.

إرشادات وتوجيهات

- نختزل إذا أمكن وذلك بقسمة حدّي الكسر على نفس العدد

- لاحظ أنّ $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$

وأنّ: $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b}$

- نقوم بإنجاز عمليات مثل: $\frac{\frac{2}{5}}{3} = \frac{2}{5} \div 3$

ولدينا: $\frac{\frac{2}{5}}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{6}$

- ونوجد العدد x الذي يحقق:

$\frac{7}{3} \div x = \frac{3}{4}$

ومنه: $x = \frac{7}{3} \times \frac{4}{3}$

وكذلك: $\frac{7}{3} \div x = 1$

2. صحيح.

العمليات على الكسور (4)

الكفاءات المستهدفة

- توحيد مقامي كسرين.
- مقارنة كسرين.

مكتسبات

- العمليات على الأعداد العشرية
- مقارنة عددين عشريين

ما يلزمك معرفته

1. توحيد مقامي كسرين

- لتوحيد مقامي كسرين يمكن كتابة المضاعفات غير المعدومة المتتالية لأكبرهما، والتوقف عند أول ظهور لأحد مضاعفات المقام الآخر.
- لتوحيد مقامي كسرين $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{d}$ يمكن استعمال الجداء $c \times d$ كمقام مشترك، ولكنه قد لا يكون أصغر مقام مشترك لهما.

2. مقارنة كسرين

- إذا كان لكسرين نفس المقام، فإنهما يرتبان حسب ترتيب بسطيهما.
- إذا كان لكسرين نفس البسط، فإنهما يرتبان عكس ترتيب مقاميهما.

لمقارنة كسرين يمكن:
- توحيد مقاميهما (أو توحيد بسطيهما)، ثم تطبيق ما سبق.
- مقارنة كل منهما بعدد ثالث.

ملاحظات وتنبيهات

لمقارنة عدة كسور يمكن البدء بمقارنة اثنين اثنين، ثم الاستنتاج.

تمارين

1. اكتب كلّ كسرين فيما يأتي بنفس المقام المعطى.

أ) $\frac{8}{15}$ و $\frac{7}{6}$ والمقام 30.
ب) $\frac{8}{15}$ و $\frac{7}{6}$ والمقام 60.
ج) $\frac{5}{21}$ و $\frac{11}{7}$ والمقام 21.
د) $\frac{5}{21}$ و $\frac{11}{7}$ والمقام 63.

2. وحدّد مقامي كلّ كسرين فيما يأتي.

أ) $\frac{4}{3}$ و $\frac{7}{12}$
ب) $\frac{8}{14}$ و $\frac{2.5}{7}$
ج) $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{4}$
د) $\frac{4.6}{12}$ و $\frac{7}{15}$
هـ) $\frac{7}{1.4}$ و $\frac{0.1}{0.7}$
و) $\frac{18}{0.15}$ و $\frac{9}{0.12}$

3. وحدّد مقامات الكسور في كلّ حالة مما يأتي.

أ) $\frac{3}{5}$ ، $\frac{18}{15}$ ، $\frac{36}{45}$
ب) $\frac{0.04}{6}$ ، $\frac{7}{72}$ ، $\frac{0.1}{18}$ ، $\frac{5}{21}$
ج) $\frac{1}{4}$ ، $\frac{7}{12}$ ، $\frac{5}{12}$
د) $\frac{11}{7}$ ، $\frac{0.8}{5}$ ، $\frac{21}{21}$ ، $\frac{1.12}{15}$

4. قارن بين الكسرين في كلّ مما يأتي.

أ) $\frac{5}{4}$ و $\frac{7}{4}$
ب) $\frac{5}{3}$ و $\frac{5}{13}$
ج) $\frac{3}{4}$ و $\frac{6}{8}$
د) $\frac{59}{7}$ و $\frac{10}{3}$
هـ) $\frac{3.5}{1.2}$ و $\frac{17.5}{6}$
و) $\frac{12}{37}$ و $\frac{25}{14}$

5. رتّب الكسور الآتية ترتيبا تصاعديا.

$\frac{14}{34}$ ، $\frac{64}{17}$ ، $\frac{5}{17}$ ، $\frac{46}{34}$ ، $\frac{5}{8}$

6. أجرى رياض استبيانا حول متابعة الحصص المتلفزة بالمتوسّطة التي يدرس فيها، فوجد أنّ: خمسي ($\frac{2}{5}$) عدد تلاميذها يفضّلون متابعة الرّسوم المتحركة، وسدسهم ($\frac{1}{6}$) يفضّل متابعة الأشرطة الوثائقية، و $\frac{1}{10}$ منهم يفضّلون متابعة الرّياضة.

أ) أيّ الحصص المذكورة أعلاه هي الأكثر متابعة من قبل تلاميذ هذه المتوسّطة.

ب) إذا علمت أنّ عدد تلاميذ هذه المتوسّطة هو 450، فهل كل التلاميذ شاركوا في هذا الاستبيان؟

حلول التمارين

1. لدينا $\frac{35}{30} = \frac{7\times5}{6\times5} = \frac{7}{6}$ و $\frac{10}{30} = \frac{5\times2}{15\times2} = \frac{5}{15}$ والكسران هما: $\frac{35}{30}$ و $\frac{10}{30}$

ب) لدينا $4\times15=60$ و $10\times6=60$ ومنه: $\frac{70}{60} = \frac{7}{6}$ و $\frac{32}{60} = \frac{8}{15}$ والكسران هما: $\frac{70}{60}$ و $\frac{32}{60}$

ج) الكسران هما: $\frac{5}{21}$ و $\frac{33}{21}$ د) الكسران هما: $\frac{15}{63}$ ، $\frac{99}{63}$

2. أ) نلاحظ أنّ العدد 12 مضاعف للعدد 3، $3\times4=12$. الكسران هما: $\frac{16}{12}$ و $\frac{2}{12}$

ب) نلاحظ أنّ العدد 14 مضاعف للعدد 7، $2\times7=14$. الكسران هما: $\frac{8}{14}$ و $\frac{5}{14}$

ج) نبحث عن مضاعفات 4، يكون أوّل ظهور لمضاعفات 3 هو 12.

و $3\times4=12$ و $4\times3=12$ الكسران هما: $\frac{3\times4}{12}$ و $\frac{5\times3}{12}$ أي $\frac{8}{12}$ و $\frac{15}{12}$

د) نبحث عن مضاعفات 15، يكون أوّل ظهور لمضاعفات 12 هو 60.

و $5\times12=60$ و $4\times15=60$ الكسران هما: $\frac{55\times5}{60}$ و $\frac{7\times4}{60}$ أي $\frac{23}{60}$ و $\frac{28}{60}$

هـ) نلاحظ أنّ $\frac{35}{7} = \frac{70}{14}$ و $\frac{5}{14} = \frac{70}{14}$ فالكسران هما $\frac{35}{7}$ و $\frac{1}{7}$

و) $\frac{26}{3} = \frac{360}{15}$ و $\frac{18}{0.15} = \frac{900}{12} = \frac{75}{1}$ ، $\frac{9}{0.03}$ والكسران هما $\frac{26}{3}$ و $\frac{225}{3}$

3. أ) العدد 45 مضاعف للعددين 5 و 15 حيث: $9\times5=45$ ، $3\times15=45$ وبالتالي الكسور المطلوبة هي: $\frac{27}{45}$ ، $\frac{54}{45}$ ، $\frac{36}{45}$

ب) العدد 72 مضاعف للأعداد: 6، 18، 72 وليس مضاعفا للعدد 21، وبالتالي نكتب مضاعفات العدد 72 ونتوقف عند ظهور أوّل مضاعف للعدد 21 وهو 504.

ولدينا: $504=6\times84$ ، $504=18\times28$ ، $504=72\times7$ ، $504=21\times24$.

ومنه الكسور هي: $\frac{336}{504}$ ، $\frac{49}{504}$ ، $\frac{28}{504}$ ، $\frac{120}{504}$

4. أ) الكسران $\frac{5}{4}$ ، $\frac{7}{4}$ لهما المقام نفسه، و $5<7$ إذن $\frac{5}{4}<\frac{7}{4}$

ب) الكسران $\frac{5}{3}$ ، $\frac{5}{13}$ لهما البسط نفسه، و $3<13$ إذن $\frac{5}{3}>\frac{5}{13}$

ج) نوحد مقام الكسرين $\frac{3}{4}$ ، $\frac{6}{8}$ فنحصل على الكسرين $\frac{6}{8}$ ، $\frac{6}{8}$ إذن: $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

د) نلاحظ أنّ $\frac{12}{37}<1$ و $1<\frac{25}{14}$ إذن: $\frac{12}{37}<\frac{25}{14}$

5. اختزل الكسرين $\frac{46}{34}$ و $\frac{14}{34}$ أوحدّ مقامات الكسور $\frac{5}{8}$، $\frac{21}{17}$، $\frac{5}{17}$، $\frac{64}{17}$، $\frac{7}{17}$

فنحصل على الكسور: $\frac{10625}{17}$ ، $\frac{23}{17}$ ، $\frac{5}{17}$ ، $\frac{64}{17}$ ، $\frac{7}{17}$

وترتيبها تصاعديا هو كما يلي: $\frac{64}{17}<\frac{23}{17}<\frac{10625}{17}$ ، $\frac{7}{17}<\frac{5}{17}$

وترتيب الكسور هو: $\frac{64}{17}<\frac{46}{34}<\frac{5}{8}<\frac{14}{34}<\frac{5}{17}$

6. أ) نقارن بين الكسور $\frac{2}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ ، $\frac{3}{10}$ ، فنجد: $\frac{1}{6}<\frac{3}{10}<\frac{2}{5}$

ومنه الحصة الأكثر مشاهدة هي حصة الرّسوم المتحركة.

ب) بما أنّ $\frac{26}{30} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{2}{5}$ و أنّ $\frac{26}{30}<1$ فإنّ تلاميذ المتوسّطة لم يشاركو كلّهم في الاستبيان.

4. صحيح، لاحظ أنّ $\frac{987654321}{987654320}>1$ و $1>\frac{887654321}{987654321}$

إرشادات وتوجيهات

• لتوحيد مقامي كسرين يمكن اختيار المضاعفات غير المعدومة المشتركة لأكبر هما، والتوقف عند أول ظهور لأحد مضاعفات المقام الأخر.

• $21=7\times3$ و $21=21\times1$

• $63=21\times3$ و $63=7\times9$

• يمكن أن نختزل الكسر $\frac{8}{14}$ ونجد الكسران هما: $\frac{4}{7}$ و $\frac{2.5}{7}$

• لإنجاز الفرع (و) يمكن الاستغناء من الفرع (د) على اعتبار الكسور هما: $\frac{360}{15}$ و $\frac{900}{12}$

• جـ) $\frac{80}{96}$ ، $\frac{21}{96}$ ، $\frac{72}{96}$

• د) $\frac{784}{105}$ ، $\frac{115}{105}$ ، $\frac{168}{105}$ ، $\frac{165}{105}$

• يمكن أن نختزل الكسر $\frac{6}{8}$ فنحصل على الكسر $\frac{3}{4}$ إذن: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

• بعد توحيد مقامي كلّ كسرين نجد

د) $\frac{59}{7} > \frac{10}{3}$ هـ) $\frac{17.5}{5} = \frac{3.5}{1.2}$

• $17=8\times2.125$

• نعني بالترتيب التصاعدي ترتيب الأعداد من الأصغر إلى الأكبر

• إذا كان مجموع الكسور $\frac{2}{5}$، $\frac{1}{6}$ يساوي 1 فإنّ جميع تلاميذ المتوسطة شاركوا في الاستبيان

• يمكن حساب عدد التلاميذ الذين يشاهدون كلّ حصة والتأكّد من أنّ مجموعهم لا يساوي 450.

05 العمليات على الكسور (5)

الكفاءات المستهدفة - جمع وطرح كسرين.

ملاحظات

- جمع أو طرح كسرين لهما نفس المقام أو مقام أحدهما مضاعف للآخر
- توحيد مقامي كسرين

ما يلزمك معرفته

1. لحساب مجموع (أو فرق) كسرين لهما نفس المقام نجمع (أو نطرح) بسطيهما دون تغيير المقام

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

حيث $b \neq 0$

2. لحساب مجموع (أو فرق) كسرين ليس لهما نفس المقام:

1. نستبدلهما بكسرين لهما نفس المقام (أي نوحّد مقامي الكسرين المعطيين)

2. نجمع (أو نطرح) بسطي الكسرين الناتجين دون تغيير المقام الموحّد.

ملاحظة

لحساب مجموع الكسرين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ويمكن استعمال العدد $b \times d$ كمقام مشترك لهما (وقد لا يكون أصغر مقام مشترك لهما). وبالتالي

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$$

اختبار نفسي

- لحساب مجموع (أو فرق) كسرين مقاماتها أعداد عشرية يمكن البدء بتحويلها إلى أعداد عشرية.

تمارين

1. احسب كلاً من:

أ) $\frac{12}{10} + \frac{7}{5}$ ب) $\frac{3}{0.48} + \frac{0.11}{0.24}$ ج) $\frac{19}{24} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

د) $\frac{713}{28} - \frac{17}{14}$ هـ) $\frac{17}{0.63} - \frac{5}{0.21}$ و) $\frac{41}{60} - \frac{2}{15} + \frac{5}{12}$

2. احسب كلاً من:

أ) $\frac{8}{21} + \frac{7}{15}$ ب) $\frac{3.7}{0.4} + \frac{1.55}{0.21}$ ج) $\frac{11}{13} + \frac{5}{3} + \frac{1}{4}$

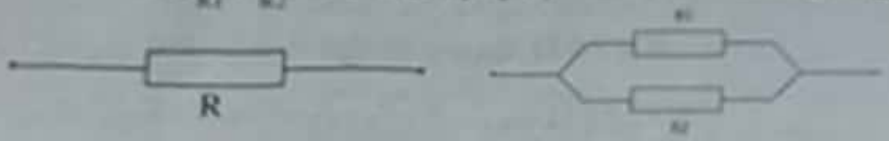
د) $\frac{3.7}{3} - \frac{2.7}{13}$ هـ) $\frac{10.7}{1.1} - \frac{10.6}{3.5}$ و) $\frac{1}{22} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5}$

3. إليك العدد $a = \frac{2 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}}$

أ) دون إجراء أيّ حساب قارن بين العدد a و 1.

ب) بسّط a، ثم اكتبه على الشكل العشري.

4. في الفيزياء عندما نركّب مقاومتين $R1$ و $R2$ على التفرّع فإننا نحصل على مقاومة مكافئة R، نحسب قيمتها من العلاقة: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$



احسب قيمة المقاومة R في كلّ مما يأتي:

أ) $R1 = 2\Omega$ و $R2 = 10\Omega$ ب) $R1 = 1,2\Omega$ و $R2 = 0,5\Omega$

5. تقاسم ثلاثة شركاء محصول استثمارهم في زراعة القمح وفقا لمساهمتهم. فنال الأول ثلث ($\frac{1}{3}$) المحصول، ونال الثاني نصف ما ناله الأول، ونال الثالث خمسي ($\frac{2}{5}$) المحصول، وتصدّقوا بالباقي.

أ) عبّر بكسر عن حصة الثاني من المحصول.

ب) اكتب على شكل كسر المقدار الذي تصدّقوا به.

ج) أيّ الشركاء الثلاثة نال أكبر حصة؟

6. حنفيتان تملآن حوض ماء، الأولى تملؤه في 4 ساعات، والثانية تملؤه في 6 ساعات.

أ) عبّر بكسر عن جزء الحوض الذي تملؤه كلّ حنفية خلال ساعة.

ب) عبّر بكسر عن جزء الحوض الذي تملؤه الحنفيتان معا خلال ساعة.

ج) إذا فتحنا الحنفيتين معا، فكم يلزم من الوقت حتى يمتلئ الحوض؟

صحيح أم خطأ؟ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

حلول التمارين

1. 1) $\frac{17}{10}+\frac{17}{5}=\frac{17}{10}+\frac{34}{10}=\frac{51}{10}$ ب) $\frac{5}{0,44}+\frac{0,11}{0,24}=\frac{5}{0,44}+\frac{0,55}{0,24}=\frac{5,55}{0,68}$

ج) $\frac{19}{24}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{19}{24}+\frac{16}{24}+\frac{6}{24}=\frac{41}{24}$ د) $\frac{715}{28}-\frac{13}{14}=\frac{715}{28}-\frac{26}{28}=\frac{689}{28}$

هـ) $\frac{7380}{63}=\frac{1760}{63}-\frac{1380}{63}$ $\frac{55}{0,63}-\frac{5}{0,21}=\frac{1760}{63}-\frac{1380}{63}$ و) $\frac{41}{660}-\frac{2}{15}+\frac{5}{12}=\frac{41-8\times 11}{660}=\frac{29}{30}$

2. 1) $\frac{8}{21}+\frac{3}{15}=\frac{8\times 5}{105}+\frac{3\times 7}{105}=\frac{40+49}{105}=\frac{89}{105}$

ب) $\frac{5,7}{0,6}+\frac{1,55}{0,21}=\frac{57}{6}+\frac{155}{21}=\frac{777+620}{84}=\frac{1397}{84}$

ج) $\frac{11}{13}+\frac{5}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11\times 3\times 4+5\times 4\times 13+1\times 13\times 3}{3\times 4\times 13}=\frac{611}{156}$

د) $\frac{17,5}{39}=\frac{3,5}{11}-\frac{1,5}{3}$ هـ) $\frac{301,7}{1,1}-\frac{19,6}{3,5}=\frac{307\times 35-106\times 11}{11\times 35}=\frac{9539}{385}$

و) $\frac{11}{6}=\frac{55}{30}=\frac{77\times 3-2\times 10-1\times 2}{3\times 10}=\frac{22}{10}-\frac{2}{3}-\frac{1}{5}$

3. 1) العدد a أكبر من 1 لأن: $\frac{1}{3}-3+\frac{1}{3}=2$

ب) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$ $a=\frac{2+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{6+1}{3}}{\frac{6-1}{3}}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{3}}$ الشكل العشري: $a=1,4$

4. 1) لدينا: $0,6=\frac{6}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$. ومنه $R=0,6\ \Omega$.

ب) لدينا $\frac{17}{6}=\frac{10}{5}+\frac{10}{12}=\frac{1}{1,2}+\frac{1}{0,5}$ ، ومنه $R=2,83\ \Omega$.

5. 1) لدينا $\frac{1}{6}=\frac{\frac{1}{3}}{2}$ ومنه حصة الثاني تساوي $\frac{1}{6}$ المحصول

ب) $\frac{1}{10}=1-\frac{27}{30}=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\right)$ والمقدار الذي تصدّقوا به هو $\frac{1}{10}$ المحصول

ج) لدينا $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$ و $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ ومنه $\frac{2}{5}>\frac{1}{3}>\frac{1}{6}$

وبالتالي الشريك الثالث هو الذي نال أكبر حصة.

6. 1) جزء الحوض الذي تملؤه الحنفية الأولى خلال ساعة هو $\frac{1}{4}$.

جزء الحوض الذي تملؤه الحنفية الثانية خلال ساعة هو $\frac{1}{6}$.

ب) لدينا $\frac{5}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$، والحنفيتان تملآن معا خلال ساعة $\frac{5}{12}$ من الحوض.

ج) عند فتح الحنفيتين معا يمتلئ الحوض في مدة x حيث: $x=\frac{60\times 1}{\frac{5}{12}}$.

$x=\frac{60\times 2}{5}$ أي $x=144\ cm$ والوقت الازم هو 114 دقيقة.

الإجابة خطأ والصواب: $\frac{5}{1,2}+\frac{4}{3}=\frac{50+16}{12}=\frac{66}{12}=\frac{11}{2}$

إرشادات وتوجيهات

- 0,68 مضاعف مشترك للعددين 0,24 و 0,68
- $0,68=2\times 0,68$
- في (ب) كما يمكن تحويل الكسر إلى عددين طبيعيين ثم حساب المجموع $\frac{1}{0,68}+\frac{0,11}{0,24}=\frac{893}{68}=\frac{77}{68}=\frac{572}{68}$
- $893=21\times 5$ ، $105=15\times 7$
- نجد أولا أصغر مضاعف مشترك لأكبر العددين 4 و13 وهو 52، ثم نبحث عن أصغر مضاعف مشترك للعددين 1 و52 وهو 156.
- إذا كان بسط كسر أكبر من مقامه فإن هذا الكسر أكبر من الواحد.
- إذا كان بسط كسر أصغر من مقامه فإنّ هذا الكسر أصغر من الواحد.
- حصة الثاني تساوي حاصل قسمة حصة الأول على 2، أي $\frac{\frac{1}{3}}{2}$
- نعتبر أن المحصول يمثل 1.
- $1h=60\ mn$
- من جدول التناسبية الآتي يمكن إيجاد الوقت اللازم لكي يمتلئ الحوض عند فتح الحنفيتين معا

جزء الحوض	$\frac{5}{12}$	1
المدة الزمنية	60	x

نحوّل 1h إلى دقائق أي 60.

الحوض كلّه يمثل بـ $\frac{12}{12}$ أي 1.

الأعداد النسبية (1)

الكفاءات المستهدفة

- حساب جداء عددين نسبيين

تمارين

1. لاحظ التعبير اللغوي في المثال الآتي، وأكمل على منواله ما يأتي:
مثال: $(+2) \times (+7)$ هو جداء عددين موجبين وهو عدد موجب.
أ) $(+13) \times (-7)$ هو جداء عدد ... وعدد ... وهو عدد ...
ب) $(-17) \times (-29)$ هو ...
جـ) $(-72) \times (-8)$ هو ...

2. عيّن إشارة كل جداء مما يأتي، ثم احسبه:
$a = -1 \times 5 \times (-3)$
$b = 2 \times (-4) \times 0,7 \times (-5) \times (-3)$
$c = 5 \times (-10) \times (-8) \times (-0,1) \times (-0,11)$
$d = -6 \times (-2,3) \times (-4) \times 2 \times (-0,5) \times (-3)$

3. ضع الإشارة المناسبة مكان النقط:
أ) $(-6) \ldots (-3) = 18$
ب) $(-1,5) \times (\ldots 10) = 15$
ج) $(\ldots 0,1) \ldots (7) = -0,7$
د) $(-0,5) \times (-2) \times (-10) \times (\ldots 2) = -20$

4. انقل وأكمل بالكلمة المناسبة "موجب" أو "سالب":
أ) جداء عدد فردي من العوامل الموجبة هو عدد ...
ب) جداء عدد فردي من العوامل السالبة هو عدد ...
ج) جداء عدد زوجي من العوامل السالبة هو عدد ...
د) جداء عدد زوجي من العوامل الموجبة هو عدد ...
هـ) إذا كان في جداء عدد العوامل السالبة هو ضعف عدد العوامل الموجبة فإن هذا الجداء هو عدد ...

5. مطلوب منك في كلّ مما يأتي تحديد ما كان إذا الأمر يتعلق بعملية ضرب أو جمع أو كلاهما ممكن.
أ) $(+\blacksquare) = (-\blacksquare) \ldots (-\blacksquare)$
ب) $(-\blacksquare) = (-\blacksquare) \ldots (-\blacksquare)$
ج) $(+\blacksquare) = (+\blacksquare) \ldots (+\blacksquare)$
د) $(+\blacksquare) = (-\blacksquare) \ldots (+\blacksquare)$

6. أ) اكتب -6 بكل الطرق الممكنة $-$ العدد 21 على شكل جداء عددين صحيحين نسبيين.
ب) نفس السؤال من أجل العدد -6.

7. أكمل جدول التناسبية الآتي:

	-2	2		7
15		-6	-9	

x ...

الكفاءات المكتسبة

- حساب جداء عددين نسبيين
- مفهوم العدد النسبي

برامج تعلم الآلة

- جداء عددين نسبيين لهما نفس الإشارة هو عدد نسبي موجب.
- جداء عددين نسبيين مختلفين في الإشارة هو عدد نسبي سالب.

$(+\ldots) \times (+\ldots) = +\ldots$
$(-\ldots) \times (-\ldots) = +\ldots$
$(+\ldots) \times (-\ldots) = -\ldots$
$(-\ldots) \times (+\ldots) = -\ldots$

طريقة

- نعيّن إشارة الجداء.
- نضرب مسافاتهما إلى الصفر.

1. أ) [illegible] هو جداء عدد سالب وعدد موجب وهو عدد سالب.
ب) [illegible] هو جداء عددين سالبين وهو عدد موجب.
ج) [illegible] هو مجموع عددين سالبين وهو عدد سالب.

2. أ) عدد موجب ب) عدد سالب
ج) عدد موجب د) عدد سالب

3. أ) [illegible]
ب) [illegible]
ج) [illegible]
د) [illegible]

4. أ) جداء عدد فردي من العوامل التي موجبة هو عدد موجب.
ب) جداء عدد فردي من العوامل السالبة هو عدد سالب.
ج) جداء عدد زوجي من العوامل السالبة هو عدد موجب.
د) جداء عدد زوجي من العوامل التي موجبة هو عدد موجب.
هـ) إذا كان في جداء عدد العوامل السالبة هو ضعف عدد العوامل التي موجبة فإن هذا الجداء هو عدد موجب.

5. أ) الأمر يتعلق بعملية الضرب.
ب) الأمر يتعلق بعملية الجمع
ج) الأمر يتعلق بعملية الضرب أو الجمع
د) الأمر يتعلق بعملية الجمع

6. بالنسبة إلى العدد 21 :

$(+1) \times (+21)$ ، $(-1) \times (-21)$

$(+3) \times (+7)$ ، $(-3) \times (-7)$

بالنسبة إلى العدد -6:

$(+1) \times (-6)$ ، $(-1) \times (+6)$ ، $(+2) \times (-3)$ ، $(-2) \times (+3)$

7. لنبحث أولا عن معامل التناسبية من العمود الثالث [illegible]
ومنه معامل التناسبية يساوي 3−

−5	−2	2	3	7
15	6	−6	−9	−21

ملاحظات وتوجيهات

- جداء عددين موجبين أو سالبين هو عدد موجب.
- جداء عدد زوجي من العوامل السالبة هو عدد موجب.
- جداء عدد فردي من العوامل السالبة هو عدد سالب.
- [illegible]
- لاحظ أن: [illegible]

الكفاءات المستهدفة

- حساب حاصل قسمة عددين نسبيين.

مكتسبات

- حساب حاصل قسمة عددين عشريين.
- مفهوم العدد النسبي.

ما يلزمك معرفته

- حاصل قسمة عدد نسبي a على عدد نسبي غير معدوم b هو العدد الذي جداؤه بالعدد b هو a.
ويكتب $a : b$ أو $\frac{a}{b}$.
- حاصل قسمة عددين نسبيين لهما نفس الإشارة هو عدد موجب.
- حاصل قسمة عددين نسبيين مختلفين في الإشارة هو عدد سالب.

$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{-} = +$
$\frac{-}{+} = -$	$\frac{+}{-} = -$

- إشارة حاصل قسمة عددين نسبيين هي إشارة جدائهما.
- لحساب حاصل قسمة عدد نسبي a على آخر b (غير المعدوم)، نقسم المسافة إلى الصفر للعدد a على المسافة إلى الصفر للعدد b، ونطبق قاعدة الإشارات.
- حاصل قسمة عددين نسبيين ليس دوما عددا نسبيا.

تمارين

1. لاحظ التعبير اللغوي في المثال الآتي، وأكمل على منواله كلّ من (أ) و(ب) و (ج)

المثال: $\frac{+5}{+4}$ هو حاصل قسمة عددين موجبين وهو عدد موجب.

أ) $\frac{-21}{-3}$ هو ...

ب) $\frac{-97}{+14}$ هو حاصل قسمة عدد ... على عدد ... وهو عدد ...

ج) $\frac{+46}{-11}$ هو ...

2. إذا علمت أنّ جداء كلّ ثلاثة أعداد متتالية يساوي 42 – في عجلة الأعداد المقابلة، فأوجد العدد الواقع في خانة نقطة الاستفهام.

3. عيّن إشارة كل مما يأتي، ثمّ أحسبه.

$$a = \frac{-12}{+3} \times (-5) \quad ; \quad b = \frac{-7,5}{-15} \times (+13) \quad ; \quad c = \frac{(-6) \times (-0,4)}{-2,4}$$

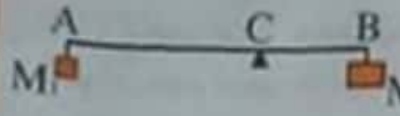
4. يرمز x فيما يأتي إلى عدد نسبي. عيّن إشارته ثمّ أحسب قيمته المضبوطة أو المدوّرة إلى 10^{-2}.

أ) $7 \times x = -708$

ب) $5 \times (-3) \times x = -30,6$

ج) $\frac{(-2,8) \times x \times (33)}{-21} = -23$

5. الشكل أدناه يمثل قضيبا مهمل الكتلة، يرتكز على سند في النقطة C، معلق في طرفيه A و B كتلتين M_1 و M_2. وشرط توازن هذه الجملة يعطى بالعلاقة: $M_1 \times CA = M_2 \times CB$.



نعطي $AB = 1m$ و $M_1 = 3,5kg$ أحسب الكتلة M_2 التي تجعل الجملة متوازنة إذا علمت أنّ $CB = 25\ cm$.

6. تريد شركة البترول (سوناطراك) بناء خزان على شكل اسطوانة دوران، حسب المخطط المرفق.

أ) عبّر عن V حجم الأسطوانة بدلالة طول نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h.

ب) إذا علمت أنّ حجم الخزان يساوي $3950\ m^3$ وأن طول نصف قطر قاعدته يساوي $15\ m$، فاحسب ارتفاعه h (خذ $\pi = 3,14$، وأعط النتيجة مقربة بالزيادة إلى 0,1).

صحيح أم خطأ؟ العددان اللذان مجموعهما سالب وحاصل قسمتهما موجب هما عددان سالبان.

حلول التمارين

1. 1) $\frac{-21}{-8}$ هو حاصل قسمة عددين سالبين وهو عدد موجب.

ب) $\frac{-97}{+14}$ هو حاصل قسمة عدد سالب على عدد موجب وهو عدد سالب.

ج) $\frac{+46}{-11}$ هو حاصل قسمة عدد موجب على عدد سالب وهو عدد سالب.

2. نبدأ بالبحث عن العدد في الخانة المجاورة للعدد 2 – من:

$-42 = \ldots \times (-2) \times 7$، فنجده 3.

ثم نبحث عن العدد المجاور للعدد 3 من:

$-42 = \ldots \times 3 \times (-2)$، فنجده 7.

ونكمل هكذا حتى نجد العدد الموجود في خانة نقطة الاستفهام، وهو 7.

3. a عدد موجب، و $a = \frac{12 \times 5}{3} = 20$. b = عدد موجب، و $b = \frac{7,5 \times 13}{15} = 6,5$

c عدد سالب، و $c = \frac{6 \times 0,4}{2,4} = -1$.

4.

1) x عدد سالب و $x = \frac{-708}{7}$ أي: $x = 101,14$.

ب) x عدد موجب و $x = \frac{-30,6}{-15}$ أي: $x = 2,04$.

ج) x عدد سالب و $x = \frac{(-23) \times (-21)}{(-2,8) \times 33}$ أي: $x = 5,23$.

5. لدينا: $AB = AC + CB$ ومنه $AC = AB - CB = 1 - 0,25 = 0,75\ m$

ولدينا: $M_1 \times CA = M_2 \times CB$ ومنه:

$$M_2 = \frac{M_1 \times CA}{CB} = \frac{3,5 \times 0,75}{0,25} = 3,5 \times 3 = 10,5\ kg$$

أي تتوازن الجملة إذا كانت: $M_2 = 10,5\ kg$.

6. 1) التعبير عن V حجم الأسطوانة بدلالة r و h:

نعلم أنّ حجم اسطوانة دوران يساوي جداء مساحة قاعدتها وارتفاعها.

أي: $V = \pi \times r \times r \times h$

ب) $V = \pi \times r \times r \times h$ ومنه $h = \frac{V}{\pi \times r \times r}$

$$h = \frac{V}{\pi \times r \times r} = \frac{3950}{3,14 \times 15 \times 15} = \frac{158}{28,26}$$

$$h = \frac{158}{28,26} = 5,6m$$

- حاصل قسمة عددين نسبيين لهما نفس الإشارة هو عدد موجب.
- حاصل قسمة عددين نسبيين مختلفين في الإشارة هو عدد سالب.
- نحصل على العدد نفسه إذا عاد البحث عن العدد في الخانة المجاورة للعدد 7 ثم الذي يليه، وهكذا.
- إشارة الجداء مثل إشارة حاصل القسمة.
- إشارة x تحدد إشارة حاصل القسمة ثم إشارة الجداء.
- لاحظ أنّ: $25\ cm = 0,25\ m$
- بأخذ: $\pi = 3,14$
- النتيجة مقرّبة بالزيادة إلى 0,1

الكفاءات المستهدفة

- التعرف على العدد الناطق.
- كتابة عدد ناطق في شكله المبسط والاختزال.

تمارين

1. ضع رمز الصحة ✓ في الخانة المناسبة من الجدول المقابل:

العدد	14	-5	$\frac{11}{4}$	$\frac{-10,5}{3}$	$\frac{36}{-11}$	$-4,012$
طبيعي						
عشري						
نسبي						
ناطق						

2. الكسور الآتية تمثل أربعة أعداد ناطقة المطلوب منك تمييزها، وتعيينها بأبسط شكل لها:

$$\frac{-7}{6} \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{-8} \cdot \frac{-16}{-24} \cdot \frac{7}{6} \cdot -1,5 \cdot \frac{-7}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{-6} \cdot \frac{-1}{2}$$

3. اكتب كل عدد مما يأتي على شكل كسر مقامه 10:

$$0,9 \cdot \frac{15}{-60} \cdot \frac{108}{120} \cdot \frac{7}{0,3} \cdot \frac{4}{-6} \cdot \frac{12}{5}$$

4. 1) كل عدد مما يأتي يمكن كتابته على شكل كسر مقامه 10 أو 100 أو 1000 أو ... 10 باستثناء واحد فقط. عينه:

$$\frac{3,9}{4} \cdot \frac{16}{7} \cdot \frac{3,7}{-0,5} \cdot \frac{12,5}{25} \cdot \frac{-11}{4} \cdot \frac{5}{2}$$

ب) اكتب كل عدد على شكله العشري المضبوط أو المدور إلى 0,001:

5. اختزل كلاً مما يأتي (اكتب الناتج على أبسط شكل ممكن):

$$\frac{21}{91} \cdot \frac{44}{0,4} \cdot \frac{-36}{-21} \cdot \frac{-105}{4,5} \cdot \frac{350}{-150} \cdot$$

6. أكمل بالعدد المناسب كلاً مما يأتي:

1) $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{35}$ ب) $\frac{\dots}{91} = \frac{5}{9}$ ج) $\frac{-3}{\dots} = \frac{1}{4}$ د) $\frac{-2}{21} = \frac{\dots}{10,5}$

7. a و b عددان نسبيان حيث $b \neq 0$. أكمل بأحد الرمزين: $=$ أو $\neq$:

$$\frac{2a}{-2b} \cdot \frac{a}{-b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{5a}{5b} \cdot \frac{a+7}{b+7} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{-5a}{5b} \cdot \frac{a}{b}$$

8. اختزل كلاً مما يأتي (اكتب الناتج على أبسط شكل ممكن):

$$a = \frac{-2 \times 21}{3 \times 8} \cdot b = \frac{25 \times (-4) \times 9}{-8 \times 20} \cdot c = \frac{-21 \times (-7)}{-3 \times (-14) \times (-21)}$$

حلول التمارين

1.

العدد	14	−5	$\frac{13}{4}$	$\frac{-10,5}{3}$	$\frac{28}{-11}$	−4,012
طبيعي	✓					
عشري	✓		✓			
نسبي	✓	✓	✓	✓		✓
ناطق	✓	✓	✓	✓	✓	✓

2.

العدد	أبسط تمثيل له
$\frac{14}{12}$ ؛ $\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$
$\frac{2}{3}$ ؛ $\frac{16}{24}$ ؛ $\frac{-16}{-24}$ ؛ 1,5 − ؛	$\frac{2}{3}$
$-\frac{3}{2}$ ؛ $\frac{-3}{2}$ ؛ $\frac{9}{-6}$	−1,5
$\frac{-7}{6}$ ؛ $\frac{7}{-6}$ ؛ $\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$

3. $\frac{12}{5} \cdot \frac{20}{30} = -\frac{22}{30}$ ؛ $\frac{4}{-6} \cdot \frac{700}{30} = \frac{7}{0,3} \cdot \frac{108}{120} = \frac{22}{30} \cdot \frac{7,5}{30} = -\frac{15}{-60} \cdot \frac{27}{30} = 0,9$

4. 1) لا يوجد عدد نسبي جداؤه بالعدد 7 يعطي 10 أو 100 أو 1000 أو 0 ... 10.
ومنه العدد الذي لا يمكن كتابته على شكل كسر مقامه 10 ؛ أو (100 أو 1000 أو 0 ... 10 هو ؛ $\frac{16}{7}$)

ب) $\frac{5}{2} = 2,5$ ؛ $\frac{-11}{4} = -2,75$ ؛ $\frac{12,5}{25} = 0,5$ ؛ $\frac{3,7}{-0,5} = -7$

$\frac{2,9}{8} = 0,3625$ ؛ $\frac{16}{7} = 2,286$ (مدوّر إلى 0,001).

5. $\frac{21}{91} = \frac{7 \times 3}{7 \times 13} = \frac{3}{13}$ ؛ $\frac{44}{0,4} = \frac{440}{0,4} = \frac{110 \times 4}{4} = 110$ ؛

$\frac{-36}{-21} = \frac{12 \times 3}{7 \times 3} = \frac{12}{7}$ ؛ $\frac{-105}{4,5} = -\frac{1050}{45} = -\frac{70 \times 15}{3 \times 15} = -\frac{70}{3}$

$\frac{350}{-150} = -\frac{7}{3}$

6. 1) $\frac{14}{35} = \frac{2}{5}$ ؛ ب) $\frac{5}{9} = \frac{65}{117}$ ؛ ج) $\frac{-3}{-12} = \frac{1}{4}$ ؛ د) $\frac{-1}{10,5} = \frac{-2}{21}$

7. $\frac{2a}{-2b} = \frac{a}{-b}$ ؛ $\frac{a}{b} = \frac{5a}{5b}$ ؛ $\frac{a+7}{b+7} = \frac{a}{b}$ ؛ $\frac{-3a}{3b} \neq \frac{a}{b}$

8. $a = \frac{-2 \times 21}{3 \times 8} = -\frac{7}{4}$ ؛ $b = \frac{25 \times (-4) \times 9}{-6 \times 20} = \frac{15}{2}$

$c = \frac{-21 \times (-7)}{-3 \times (-14) \times (-2)} = -\frac{7}{4}$

الإجابة خطأ. لأنّ العملية عملية جمع.

الإضافات والتوجيهات

- يمكن للعدد الناطق أن يكون نسبيا وعشريا وطبيعيا.
- للفرز يمكن الاعتماد على الاختزال، قاعدة الإشارات، الكتابة العشرية.
- لكتابة الكسر $\frac{12}{5}$ على شكل كسر مقامه 30 نبحث على المجهول الذي يحقق 30 = ... × 5، ثمّ نضربه في كلّ من البسط والمقام.
- لكتابة الكسر $\frac{108}{120}$ على شكل كسر مقامه 30 نبحث على المجهول الذي يحقق 30 = $\frac{120}{...}$، ثمّ نكمل ...
- باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $\frac{16}{7} = 2,285714286...$
- العدد الناطق المبسط هو عدد مكتوب بإشارة واحدة وغير قابل للاختزال.
- $\frac{35 \times 2}{5} = \frac{...}{35} = \frac{2}{5}$ معناه أنّ ...
- $\frac{65 \times 9}{5} = \frac{65}{...} = \frac{5}{9}$ معناه أنّ ...
- نذكر أنّ:

$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ و $\frac{a}{b} = \frac{a+k}{b+k}$

حيث: $b \neq 0$ و $k \neq 0$

09 الأعداد الناطقة (2)

الكفاءات المستهدفة

• حساب مجموع وفرق وجداء وحاصل قسمة عددين ناطقين.

مكتسبات

• العمليات على الكسور والأعداد النسبية.

ما يلزمك معرفته

1) جداء عددين ناطقين

لحساب جداء عددين ناطقين مكتوبين على شكل كسرين، نحسب حاصل قسمة جداء بسطيهما على جداء مقاميهما، مع تطبيق قاعدة الإشارات.

أي: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

حيث a, b, c, d أعداد نسبية،

و حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$

2) قسمة عدد ناطق على آخر

لحساب حاصل قسمة عدد ناطق x على عدد ناطق غير معدوم y، نضرب العدد x في مقلوب العدد y

$y \neq 0$ حيث: $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$

بصفة عامة: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

من أجل كل a, b, c, d أعداد نسبية،

حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

3) مجموع أو فرق عددين ناطقين

لحساب مجموع (أو فرق) عددين ناطقين مكتوبين على شكل كسرين:

• نكتب هذين العددين بمقام طبيعي موحّد إن لم يكونا كذلك.

• نجمع (أو نطرح) بسطيهما دون تغيير المقام الموحّد.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ و $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

تمارين

1. احسب كلاّ مما يأتي، بطلب إعطاء الناتج على أبسط شكل ممكن.

1) $\frac{-12}{5} \times \frac{3}{-7}$ ب) $\frac{35}{14} \times \frac{-8}{15}$ ج) $\frac{-4}{7} \times (-1,5)$ د) $\frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{-4}{7}$

2. احسب كلاّ مما يأتي، بطلب إعطاء الناتج على أبسط شكل ممكن.

1) $\frac{10}{3} \div (-8)$ ب) $\frac{42}{15} \div (-14)$ ج) $\frac{0,5}{-9} \div \frac{-1,5}{6}$

3. أكمل كلاّ من المساويات الآتية بالعدد المناسب مكتوبا على شكله الكسري:

1) $\frac{-6}{7} \times \ldots = 1$ ب) $\frac{-6}{7} \div \ldots = 1$ ج) $-\frac{5}{4} \times \ldots = 2$

4. احسب كلاّ مما يأتي، بطلب إعطاء الناتج على أبسط شكل ممكن.

1) $\frac{-8}{7} + \left(-\frac{1}{2,1}\right)$ ب) $\frac{-2}{7,5} - \frac{-18}{30}$ ج) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

5. احسب ما يأتي:

1) $\frac{5}{6} + \frac{7}{6} \times \frac{4}{21}$ ب) $\left(-5 + 4 \times \frac{3}{7}\right) \div \frac{10}{4}$ ج) $\frac{2}{3} - \left(\frac{9}{4} + \frac{-5}{7} \times \frac{1}{15}\right) \div \frac{10}{4}$

6. كانت نتائج قسم السنة الثانية متوسّط أول (2م1) في نهاية الموسم الدراسي الماضي كالتالي: $\left(\frac{3}{5}\right)$ منهم انتقلوا إلى السنة الثالثة بإجازة، والرّبع $\left(\frac{1}{4}\right)$ انتقل ولكن دون إجازة، والتلاميذ الستة (6) الباقون أعادوا السنة الثانية.

ما هو عدد تلاميذ هذا القسم؟

7. 1) احسب كلاّ من الفروق الآتية:

$1 - \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$

ب) n عدد طبيعي غير معدوم، تحقق من أنّ: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

ج) باستعمال ما سبق احسب المجموعين:

$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$

$S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$

صحيح أم خطأ؟ $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

حلول التمارين

1 1) $\frac{3}{-7}\times\frac{-12}{5}=\frac{3\times(-12)}{(-7)\times5}=\frac{36}{35}$

ب) $\frac{-8}{15}\times\frac{35}{14}=\frac{-8\times35}{15\times14}=-\frac{2\times4\times5\times7}{3\times3\times5\times7}=-\frac{4}{3}$

ج) $\frac{-4}{7}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{2\times2\times1}{7\times3}=\frac{2}{21}$ د) $(-1,5)\times\frac{-4}{7}=\frac{1,5\times4}{7}=\frac{6}{7}$

2 1) $-8+\frac{10}{3}=-8\times\frac{3}{10}=-\frac{24}{10}=-2,4$

ب) $\frac{42}{15}\div(-14)=\frac{3\times14}{3\times5}\times\frac{1}{-14}=-\frac{1}{5}$

ج) $\frac{-1,5}{6}\div\frac{0,5}{-9}=\frac{1,5}{6}\times\frac{9}{0,5}=\frac{3\times3\times9}{2\times3\times3}=\frac{9}{2}$

3 1) $\frac{-6}{7}\times\frac{7}{-6}=1$ ب) $\frac{-6}{7}\div\frac{-6}{7}=1$ ج) $-\frac{5}{4}\times\frac{-8}{5}=2$

4 1) $\frac{-8}{7}+\left(-\frac{1}{2,1}\right)=-\left(\frac{8}{7}+\frac{10}{21}\right)=-\frac{34}{21}$

ب) $-\frac{2}{7,5}-\frac{-18}{30}=-\left(\frac{20}{75}-\frac{18}{30}\right)=-\left(\frac{4}{15}-\frac{9}{15}\right)=\frac{1}{3}$

ج) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{-1}{4}=\frac{-6+4-3}{12}=-\frac{5}{12}$

5 1) $\frac{5}{6}+\frac{7}{6}\times\frac{4}{21}=\frac{5}{6}+\frac{7\times2\times2}{3\times3\times3\times7}=\frac{5}{6}+\frac{2}{9}=\frac{19}{18}$

ب) $\left(-5+4\times\frac{3}{7}\right)\div\frac{10}{21}=\left(-5+\frac{12}{7}\right)\times\frac{21}{10}=\frac{-23}{7}\times\frac{3\times7}{10}=-\frac{69}{10}=-6,9$

ج) $\frac{2}{3}-\left(\frac{9}{4}+\frac{-3}{7}\times\frac{1}{15}\right)\div\frac{10}{4}=\frac{2}{3}-\left(\frac{9}{4}+\frac{-1}{21}\right)\div\frac{5}{2}$

$=\frac{2}{3}-\frac{185}{84}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{3}-\frac{37}{42}=-\frac{3}{14}$

6. الكسر الممثل لعدد التلاميذ الذين انتقلوا هو: $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{12}{20}+\frac{5}{20}=\frac{17}{20}$

الكسر الممثل لعدد التلاميذ الذين أعادوا السنة هو: $1-\frac{17}{20}=\frac{20}{20}-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}$

عدد تلاميذ القسم هو: $6\div\frac{3}{20}=6\times\frac{20}{3}=40$

7. 1) حساب الفروق:

$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ ، $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ ، $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ، $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ب) n عدد طبيعي غير معدوم. التحقق من أن: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$

ج) $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

$S'=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

إرشادات وتوجيهات

- يمكن الاختزال بعد كتابة الجداء في شكل كسر بسيط والعمل على شكل جداء عوامل بسيطة.
- يمكن الاستفادة من $a\times x=b$ معناه $x=b\times\frac{1}{a}$
  $\frac{4}{5}\times\ldots=2$ معناه $2\times\left(-\frac{4}{5}\right)$
- في 4 (ب) نكتب $\frac{2}{7,5}$ بالشكل $\frac{20}{75}$ ثم نختزل $\frac{20}{75}$ و $\frac{18}{30}$ ونحسب الفرق $\frac{4}{15}-\frac{9}{15}$
- نحترم أولويات العمليات مع الانتباه إلى البدء بما داخل القوس.
- يستحسن البدء بالاختزال لكن نكتب:

$\frac{3}{7}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{21}$

$\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$\frac{185}{84}\times\frac{2}{5}=\frac{37}{42}\times\frac{1}{1}=\frac{37}{42}$

- في التمرين 6 نبدأ بحساب الكسر الممثل لعدد التلاميذ الذين أعادوا السنة الثانية.
- يمكن أن نتحقق من حساب S كما يأتي:

$\frac{1\times30+1\times10+1\times5+1\times3+1\times2}{60}=\frac{54}{6}$

- لحساب S نستعمل:

$\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$

القوى ذات أسس صحيحة نسبية (1)

الكفاءات المستهدفة

- تعيين القوة من الرتبة n للعدد 10.
- معرفة قواعد الحساب على قوى العدد 10، واستعمالها.

مكتسبات

- الضرب في العدد 10

ما يلزمك معرفته

1. قوى 10

n عدد طبيعي أكبر من واحد

القوة من الرتبة n للعدد 10 هي جداء n من العوامل المساوية للعدد 10.

ونكتب :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ عاملا}}$$

واصطلاحا نكتب :

$10^0 = 1$ ، $10^1 = 10$

10^n نقرأ "10 أس n"

- القوة ذات الأس السالب

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

10^{-n} هو مقلوب 10^n ، وهو قوة للعدد 10 ذات أس سالب.

$10^{-n} = 0,0\ldots01$ ، $10^n = 10\ldots0$

(n صفرا) (n رقما بعد الفاصلة)

2. قواعد الحساب على قوى العدد 10

n و m عددان صحيحان نسبيان :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$
$$(10^m)^n = 10^{m \times n}$$
$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

تمارين

1. أكمل الجدول الآتي:

قوة 10	الكتابة العشرية	الكتابة العلمية	عدد الأصفار
10^3		$10 \times 10 \times 10$	3
...	...	...	...
...		...	...
...	1000000	...	...
...	...	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	...

2. أكمل الجدول الآتي

قوة 10	الكتابة العشرية	الكتابة العلمية	رتبة 1 بعد الفاصلة
10^{-2}	$\frac{1}{10^2}$	0,01	2
10^{-3}	...	...	...
...	...	0,0001	...
...	$\frac{1}{10^7}$	...	...
...	...	...	9

3. اكتب كلاّ مما يأتي على شكل 10^n (قوة للعدد 10):

$10 \times 10^6 \times 10^{-1}$ ، $10^{-7} \times 10^{-3}$ ، $10^5 \times 10^{-4}$ ، $10^3 \times 10^2$

4. نفس السؤال من أجل :

$10^7 \times (10^{-2})^3$ ، $(10^{-3})^{-2}$ ، $(10^5)^{-4}$ ، $(10^3)^2$

5. نفس السؤال من أجل :

$\frac{10^{-3} \times 10^9}{10^5 \times 10^{-7}}$ ، $\frac{10^7}{10^{-7}}$ ، $\frac{10^7}{10^7}$ ، $\frac{10^5}{10^{-4}}$ ، $\frac{10^2}{10^5}$

6. الميكرومتر وحدة طول يرمز لها بالرمز μm وتستعمل لقياس الأبعاد الدّقيقة جدا كأبعاد الذرة وأجزائها، وهي جزء من مليون جزء من المتر.

أ) للتعبير عن واحد ميكرومتر بدلالة المتر أكمل ما يأتي :

$1\ \mu m = 10^{\ldots}\ m$

ب) إذا علمت أنّ قطر ذرّة الكربون يقدر بحوالي $0,001\ \mu m$، وأنّ قطر نواتها يساوي 0,0001 من قطرها، فعبر بالمتر عن كلّ من قطر ذرة الكربون وقطر نواتها.

7. نزل يتكون من 10 طوابق، وكل طابق به 10 غرف، وفي كل غرفة مزهريّة. يضع صاحب هذا النزل يوميا في كلّ مزهرية 10 زهرات.

إذا كان ثمن كل زهرة هو 10 دج.

عبّر بقوة للعدد عشرة عن الكلفة اليومية للأزهار، وكذا عن الكلفة الشهرية (1 شهر = 30 يوما).

صحيح أم خطأ ؟ $10^{12345789} \times 10^{-12345786} = 1$

حلول التمارين

1.

قوة 10	الكتابة العشرية	الكتابة العلمية	عدد الأصفار
10^3	1000	$10\times10\times10$	3
10^4	10000	$10\times10\times10\times10$	4
10^6	1000000	$10\times10\times10\times10\times10\times10$	6
10^9	1000000000	$10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$	9

2.

قوة 10	الكتابة العلمية	الكتابة العشرية	رتبة آخر الفاصلة
10^{-2}	$\frac{1}{10^2}$	0,01	2
10^{-3}	$\frac{1}{10^3}$	0,001	3
10^{-4}	$\frac{1}{10^4}$	0,0001	4
10^{-7}	$\frac{1}{10^7}$	0,0000001	7
10^{-9}	$\frac{1}{10^9}$	0,000000001	9

3. اكتب كلاً مما يأتي على شكل 10^n (قوة للعدد 10):

$10^3 \times 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$ ، $10^5 \times 10^{-4} = 10^{5-4} = 10$

$10^{-7} \times 10^{-2} = 10^{-7-2} = 10^{-9}$ ، $10 \times 10^6 \times 10^{-1} = 10^{1+6-1} = 10^6$

4. $(10^3)^2 = 10^{3\times2} = 10^6$ ، $(10^5)^{-4} = 10^{5\times(-4)} = 10^{-20}$

$(10^{-7})^{-2} = 10^{-7\times(-2)} = 10^{14}$ ، $10^7 \times (10^{-2})^3 = 10^{7+(-2)\times3} = 10$

5. $\frac{10^2}{10^3} = 10^{2-3} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ ، $\frac{10^5}{10^{-4}} = 10^{5+4} = 10^9$

$\frac{10^7}{10^7} = 10^{7-7} = 10^0 = 1$ ، $\frac{10^7}{10^{-7}} = 10^{7+7} = 10^{14}$

$\frac{10^{-3} \times 10^9}{10^5 \times 10^{-7}} = \frac{10^6}{10^{-2}} = 10^{6+2} = 10^8$

6. أ) $1\ \mu m = 10^{-6}\ m$

ب) قطر ذرة الكربون

$0{,}001\ \mu m = 10^{-3}\ \mu m = 10^{-3} \times 10^{-6} m = 10^{9}\ m$

قطر نواتها: $10^{-4} \times 10^{-9} m = 10^{-13} m$

7. الكلفة اليومية للأزهار: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ DA

الكلفة الشهرية للأزهار: $10^4 \times 30 = 3 \times 10^5$ DA.

ارشادات وتوجيهات

• انتبه إلى العلاقة بين عدد الأصفار والأس وعدد العوامل.

• انتبه إلى العلاقة بين رتبة آخر الفاصلة وأس العدد 10.

• تحدد قيمة كل من العددين n و m ونطبق ما يأتي:

$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$

$(10^m)^n = 10^{m\times n}$

• تحدد قيمة كل من العددين n و m ونطبق ما يأتي:

$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$

$\frac{10^{-3} \times 10^9}{10^5 \times 10^{-7}} = 10^{-3+9-5+7}$

$= 10^8$

• 1 مليون يساوي 10^6.

11 القوى ذات أسس صحيحة نسبية (2)

الكفاءات المستهدفة

- كتابة عدد عشري باستعمال قوى 10.
- تعيين الكتابة العلمية لعدد عشري.

مكتسبات

- الضرب في العدد 10.
- معرفة قواعد الحساب على قوى العدد 10.

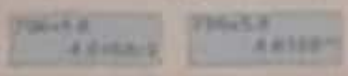
ما يلزمك معرفته

1. جداء عدد عشري بقوة للعدد 10:
- إذا كان الأس موجبا نزيح الفاصلة بعدد مراتب الأس نحو اليمين.
مثال: $5,24 \times 10^3 = 5240$
- إذا كان الأس سالبا نزيح الفاصلة بعدد مراتب الأس نحو اليسار.
مثال: $5,24 \times 10^{-3} = 0,00524$

2. الكتابة العلمية لعدد عشري هي كتابته على الشكل $a \times 10^n$ حيث:
- a عدد عشري مكتوب برقم واحد قبل الفاصلة أي: $1 \leq a < 10$
- n عدد صحيح نسبي

نستعمل الكتابة العلمية للتعبير عن أعداد كبيرة جدا (مثل المسافة بين الأرض والقمر) أو أعداد صغيرة جدا (مثل قطر ذرة).
- تُمكن اللمسة EE أو مثيلتها (حسب نوع الآلة) من الكتابة العملية لعدد عشري.
لكتابة العدد 574000 كتابة علمية باستعمال الآلة، ندخل فيها البرنامج الآتي: 5,74 EE 5 فيظهر على شاشتها $5,74^{05}$ أو $5,74 \text{ E } 5$ (حسب نوع الآلة).

وعند حساب الجداء $5,8 \times 796$ تظهر النتيجة على أحد الشكلين:



تمارين

1. اكتب كلاً من الأعداد الآتية على شكل $a \times 10^n$ حيث a عدد طبيعي، وn عدد صحيح نسبي.
$1\,300$ ، $7\,000\,000$ ، $23\,100\,000$ ، $0,07$ ، $0,000\,001$ ، $0,000\,201$

2. أكمل كلاً مما يأتي:
أ) $23\,000 = 2,3 \times 10^{\square}$
ب) $14560 = 1,456 \times 10^{\square}$
ج) $0,015 = 1,5 \times 10^{\square}$
د) $0,00021 = 2,1 \times 10^{\square}$
هـ) $783 \times 10^{\square} = 7,83 \times 10^2$
و) $0,783 \times 10^{\square} = 7,83 \times 10^2$

3. أكمل الجدول الآتي:

الكتابة العشرية	الكتابة الحاسبة	كتابات مختلفة على الشكل $a \times 10^n$		
3462000		3462x...	...x$10^{\square}$	...x$10^{\square}$
0,0002571		2571x...	...x$10^{\square}$	...x$10^{\square}$
$-0,0000101$		-101x...	...x$10^{\square}$	...x$10^{\square}$

4. آلة حاسبة تعرض الكتابة العلمية للعدد 574000 على الشكل $5,74^{05}$.
اكتب ما يظهر على شاشتها عندما ندخل فيها كلاً من البرامج الآتية:
أ) $\square$ 7 EE 32
ب) $\square$ 5 EE 367,3
ج) $\square$ 5 $-$ EE 367,3

5. يُصنع قلم الرّصاص من مادة الكربون الذي يقدر قطر ذرّته بـ 1 جزء من مليار جزء من المتر.
أ) عبّر بالمتر عن قطر ذرة الكربون باستعمال قوة للعدد 10.
ب) إذا علمت أنّ عرض خط رسم بقلم رصاص هو $0,5mm$، فاحسب عدد ذرات الكربون التي تكوّن عرض هذا الخط.

6. إذا علمت أنّ كتلة البروتون تساوي $1,6726 \times 10^{-24} g$، وهي حوالي 1836 مرّة كتلة الإلكترون، فاحسب كتلة الإلكترون.

7. علمًا أنّ المسافة بين الشمس والأرض هي حوالي $1,5 \times 10^8 km$، والضوء ينتقل بسرعة 3×10^8 مترا في الثانية (m/s)، احسب المدّة التي يستغرقها ضوء الشمس لقطع هذه المسافة بالثانية، ثمّ بالدّقيقة.

8. الصفائح الدّموية هي التي تحدث ظاهرة تخثّر الدم وتوقيف سيلانه عندما يتعرض الإنسان إلى جرح، ويوجد حوالي 250 000 صفيحة في كل واحد ملليمتر مكعب من الدم، علمًا أنه يوجد حوالي 5 لترا من الدم في جسم الإنسان، احسب العدد الكلي للصفائح الدموية (أعط النتائج بالكتابة العلمية).

صحيح أم خطأ؟ $(750)^2$ هي الكتابة العلمية للعدد $5,625 \times 10^5$

حلول التمارين

1. $23100000 = 231 \times 10^5$ ، $7000000 = 7 \times 10^6$ ، $1300 = 13 \times 10^2$
$0,000201 = 201 \times 10^{-6}$ ، $0,00001 = 1 \times 10^{-5}$ ، $0,07 = 7 \times 10^{-2}$

2.
أ) $23\,000 = 2,3 \times 10^4$
ب) $14560 = 1,456 \times 10^4$
ج) $0,015 = 1,5 \times 10^{-2}$
د) $0,00021 = 2,1 \times 10^{-4}$
هـ) $783 \times 10^2 = 7,83 \times 10^4$
و) $0,783 \times 10^2 = 7,83 \times 10^1$

3.

الكتابة العشرية	كتابات مختلفة على الشكل $a \times 10^n$ و a		
$3,462 \times 10^6$	3462×10^3	$34,62 \times 10^5$	$0,3462 \times 10^7$
$2,571 \times 10^{-4}$	2571×10^{-7}	$25,71 \times 10^{-5}$	$0,2571 \times 10^{-3}$
$-1,01 \times 10^{-5}$	-101×10^{-7}	$-10,1 \times 10^{-6}$	$-0,00000101 \times 10^2$

4. أ) $3,2^{08}$ ب) $3,673^{07}$ جـ) $3,673^{-03}$

5. أ) التعبير بالمتر عن قطر ذرة الكربون:

قطر ذرة الكربون يساوي $10^{-9} m$.

ب) نحوّل $0,5\ mm$ إلى المتر، فنجد $0,5\ mm = 5 \times 10^{-4} m$.

وبالتالي: $n = \frac{5 \times 10^{-4}}{10^{-9}} = 5 \times 10^{-4+9} = 5 \times 10^5 = 500\,000$

ومنه عدد ذرات الكربون التي تكوّن عرض هذا الخط هو: 500000.

6. لدينا: $M = \frac{1,6726 \times 10^{-24}}{1836} \approx 9,11 \times 10^{-28}$

ومنه كتلة الإلكترون تساوي حاولي $9,11 \times 10^{-28} g$.

7. المسافة بين الشمس والأرض بالمتر هي: $1,5 \times 10^8 \times 10^3 = 1,5 \times 10^{-11} m$.

ولدينا $t = \frac{d}{v} = \frac{105 \times 10^{11}}{3 \times 10} = 5 \times 10^{2}$

وبالتالي فالمدّة التي يستغرقها ضوء الشمس لقطع المسافة بين الشمس والأرض تساوي: 500s ، ويساوي 8mn 20s (8 دقائق و 20 ثانية)

8. $5l = 5 \times 10^6\ mm^3$ ومنه: $1l = 10^6\ mm^3$

لدينا: $5 \times 10^6 \times 250\,000 = 5 \times 10^6 \times 25 \times 10^4 = 1,25 \times 10^{12}$

وبالتالي فإنّ العدد الكلي للصفائح الدموية يساوي: $1,25 \times 10^{12}$.

9. خطأ، بل هي $5,625 \times 10^7$.

إرشادات وتوجيهات

- انتبه إلى العلاقة بين عدد الأصفار في الكتابة العشرية وأس العدد 10.
- انتبه إلى العلاقة بين مرتبة الرقم في أقصى يمين الكتابة العشرية والأس السالب للعدد 10.
- 1 مليار = 1000 مليون = 10^9.
- ينبغي الانتباه إلى ضرورة استعمال نفس وحدات القياس.
- نكتب العدد 1836 على شكله العلمي: ←
- نعلم أنّ المسافة تساوي جداء السرعة والزمن. أي: $d = v \times t$

ومنه: $t = \frac{d}{v}$

- واحد لتر يساوي 10^6 ملليمتر مكعب.

12 القوى ذات أسس صحيحة نسبية (3)

الكفاءات المستهدفة

- استعمال الكتابة العلمية لحصر عدد عشري بقوتين متتاليتين للعدد 10 وإيجاد رتبة مقدار
- ترتيب أعداد عشرية مكتوبة على الشكل العلمي

مكتسبات

- تعيين الكتابة العلمية لعدد عشري

ما يلزمك معرفته

1. حصر عدد عشري بين قوتين للعدد 10 ذات أسس متتاليين:

تُستعمل الكتابة العلمية $a \times 10^n$ لعدد عشري في حصره بقوتين متتاليتين للعدد 10 هما 10^n و 10^{n+1}، لأن:

$10^n < a \times 10^n < 10^{n+1}$

2. رتبة مقدار عدد عشري

لإيجاد رتبة مقدار عدد عشري يمكن تطبيق ما يأتي:

1. كتابة هذا العدد على شكله العلمي $a \times 10^n$
2. تدوير العدد a إلى الوحدة أو إلى 0,1

3. ترتيب أعداد عشرية

ترتب الأعداد العشرية المكتوبة على الشكل العلمي حسب ترتيب أسس العدد 10، وفي حالة تساوي الأسس ترتب حسب ترتيب العامل المضروب في قوى 10.

مثال:

$2 < 4$ لأن $9,78 \times 10^1 < 1,2 \times 10^2$

و

$3,2 < 5,7$ لأن $3,2 \times 10^{-1} < 5,7 \times 10^{-1}$

تمارين

1. 1) أكتب خمس قوى متتالية للعدد 10 بدءً من القوة ذات الأس 3.

ب) تحقق من أنّ مجموع هذه القوى الخمس يساوي $1,1111 \times 10^5$.

2. جدْ حصرا لكل عدد مما يأتي بقوتين متتاليتين للعدد 10:

أ) 5 200 000 ب) $2007,31 \times 10^2$

ج) 2005×10^{-6} د) $\frac{28}{100\,000}$

3. أعط الكتابة العلمية للعدد $\frac{512\,204\,000}{0,002}$، ثمّ جدْ حصرا له بقوتين متتاليتين للعدد 10.

4. باستعمال آلة حاسبة أوجد قيمة مقرّبة للعدد $\frac{0,000\,000\,052}{231}$، ثمّ اكتبها على الشكل العلمي، وأعط حصرا لها بقوتين متتاليتين للعدد 10.

5. ليكن العددان $a = 3\,879\,000$ و $b = 0,0000\,021$. احسب رتبة مقدار لكلٍّ من $a \times b$ و $\frac{a}{b}$.

6. علما أنّ المسافة بين الأرض والشمس هي حوالي $a = 150\,000\,000\,km$ وبين الأرض والقمر هي حوالي $b = 384\,400\,km$.

أ) احسب رتبة المقدار $\frac{a}{b}$ (نسبة بعد الأرض عن الشمس إلى بعدها عن القمر).

ب) جدْ حصرا بقوتين متتاليتين للعدد 10 للنسبة بين المسافتين $\frac{a}{b}$.

7. احسب رتبة مقدار كلّ مما يأتي:

$a = \frac{0,039 \times 49,2135}{210327}$ ، $b = \frac{0,00231 \times 3735}{0,048 \times 0,31}$

8. اكتب كلاّ من الأعداد الآتية كتابة علمية، ثمّ رتبها تصاعديا:

$a = 0,56 \times 10^3$ ، $b = 37\,000$ ، $c = 7,14 \times 10^{-2}$ ، $d = 71,4 \times 10^{-2}$ ،

$e = 9 \times 10^2$.

صحيح أم خطأ؟ $\frac{1}{10^2} < 0,07 < \frac{1}{10}$

حلول التمارين

1. أ) كتابة خمس قوى متتالية للعدد 10 بدء من القوة ذات الأس 3:
10^7 ، 10^6 ، 10^5 ، 10^4 ، 10^3

ب) التحقق من أنّ مجموع هذه القوى الخمس يساوي $1,1111 \times 10^7$:

$$10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 = (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) \times 10^3$$
$$= (10000 + 1000 + 100 + 10 + 1) \times 10^3$$
$$= 11111 \times 10^3 = 1,1111 \times 10^7$$

2. أ) $5\,200\,000 = 5,2 \times 10^6$ ومنه $10^6 < 5\,200\,000 < 10^7$

ب) $2007,31 \times 10^2 = 2,00731 \times 10^5$ ومنه $10^5 < 2007,31 \times 10^2 < 10^6$.

ج) $2005 \times 10^{-6} = 2,005 \times 10^{-3}$، ومنه $10^{-3} < 2005 \times 10^{-6} < 10^{-2}$.

د) $\frac{28}{100\,000} = 28 \times 10^{-5} = 2,8 \times 10^{-4}$ ومنه $10^{-4} < \frac{28}{100\,000} < 10^{-3}$

3. إعطاء الكتابة العلمية للعدد $\frac{512\,204\,000}{0,002}$

$$\frac{512\,204\,000}{0,002} = \frac{512204 \times 10^3}{2 \times 10^{-3}} = \frac{512204}{2} \times 10^{3+3}$$
$$= 256102 \times 10^6 = 2,56102 \times 10^{11}$$

حصره بقوتين متتاليتين للعدد 10 : $10^{11} < \frac{512\,204\,000}{0,002} < 10^{12}$.

4. لدينا : $\frac{0,000\,000\,052}{231} = \frac{52}{231} \times 10^{-9} \approx 2,25108225 \times 10^{-10}$

حصره : $10^{-10} < \frac{0,000\,000\,052}{231} < 10^{-9}$

5. نكتب a و b على الشكل العلمي : $a = 3,879 \times 10^6$ و $b = 2,1 \times 10^{-6}$

ومنه رتبة مقدار a تساوي 4×10^6 ، ورتبة مقدار b تساوي 2×10^{-6}.

وبالتالي : رتبة مقدار $a \times b$ تساوي $4 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-6} = 8$.

ورتبة مقدار $\frac{a}{b}$ تساوي : $\frac{4 \times 10^6}{4 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^{12}$

6. أ) لدينا $a = 1,5 \times 10^8$ و $b = 3,844 \times 10^5$

نأخذ $1,5 \times 10^8$ رتبة للمقدار a ، و 4×10^5 رتبة للمقدار b.

فنجد $\frac{a}{b} = \frac{1,5 \times 10^8}{4 \times 10^5} = 3,75 \times 10^8$ ، وبالتالي رتبة المقدار $\frac{a}{b}$ تساوي 400.

ب) $\frac{a}{b} = \frac{150000000}{384400} = \frac{1,5 \times 10^8}{3,844 \times 10^5} = \frac{1,5}{3,844} \times 10^{8-5} = 3,902185224 \times 10^2$

ومنه : $10^2 < \frac{a}{b} < 10^3$

7. لدينا : $a = \frac{3,9 \times 10^{-2} \times 4,92135 \times 10}{2,10327 \times 10^5}$ ، ومنه $\frac{4 \times 10^{-2} \times 5 \times 10}{2 \times 10^5} = 10^{-5}$

وبالتالي رتبة مقدار a تساوي 10^{-5}.

لدينا : $b = \frac{2,31 \times 10^{-3} \times 3,735 \times 10^3}{4,8 \times 10^{-2} \times 31 \times 10^{-1}}$ ومنه $\frac{2 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^3}{5 \times 10^{-2} \times 3 \times 10^{-1}} = 5,33 \times 10^2$

وبالتالي رتبة مقدار b تساوي 500.

8. $a = 5,6 \times 10^2$، $b = 3,7 \times 10^4$، $c = 7,14 \times 10^{-2}$، $d = 7,14 \times 10^{-1}$، $e = 9 \times 10^2$.

الترتيب هو : $c < d < a < e < b$

إرشادات وتوجيهات

- يجب أن تكون الأسس متتالية بدءً من 3، وهي 3، 4، 5، 6، 7.
- يمكن أن نحسب كما يأتي :

10 000 000
1 000 000
100 000
10 000
1 000
11111 000

وبالتالي :
$10^7+10^6+10^5+10^4+10^3 = 11111000$
$1,1111 \times 10^7$

- نجد $a \times 10^n$ لكتابة العلمية للعدد ثم نحصره بقوتين متتاليتين للعدد 10 بالشكل :
$10^n < \ldots < 10^{n+1}$

- يمكن إجراء عملية القسمة ثم الكتابة العلمية، فالحصر.

- تعطي الحاسبة :
$\frac{52}{213} = 0,225108225$

- في التمرين 5 لا داعي لحساب $a \times b$ و $\frac{a}{b}$ ، وإنّما نحسب رتبة مقدار كلّ من a و b ثمّ نضرب أو نقسم حسب المطلوب.

- لدينا : $\frac{a}{b} \approx 3,75 \times 10^2$
للبحث عن رتبة مقدار $3,75 \times 10^2$ ندوّر 3,75 إلى الوحدة فنجد 4 ونضرب في 10^2، فنجد 400.

- وبالفعل فعند حساب a و b باستعمال حاسبة نجد :
$a \approx 9,12544 \times 10^6$
$b \approx 579,829$

الأجوبة

$10^{-2} < 7 \times 10^{-2} < 10^{-1}$ ومنها $\frac{1}{\ldots} < 0,07 < \frac{1}{\ldots}$

13 القوى ذات أسس صحيحة نسبية (4)

الكفاءات المستهدفة

- حساب قوة لعدد نسبي
- معرفة قواعد الحساب على قوى عدد نسبي واستعمالها في وضعيات بسيطة

تمارين

1. احسب كلاّ مما يأتي:

أ) 2^3 و 3^2 ب) 5^2 و 2^5 ج) 1^9 و 9^1

د) $1,3^1$ و $2^{1,1}$ هـ) $0,5^3$

2. نفس السؤال من أجل:

أ) 2^{-1} ب) $(-1)^4$ و 1^{-4} ج) $(-5)^1$ و 5^{-1} و $(-5)^{-1}$

3. أي الأعداد الآتية هو مربّع لعدد صحيح نسبي؟

$8 \; ; \; 4 \; ; \; 25 \; ; \; 2 \; ; \; 0 \; ; \; 1 \; ; \; 81 \; ; \; 9 \; ; \; 16 \; ; \; 121$

4. أي الأعداد الآتية هو مكعّب لعدد صحيح نسبي؟

$4 \; ; \; 3 \; ; \; 1 \; ; \; 27 \; ; \; 0 \; ; \; -1 \; ; \; 64 \; ; \; 9 \; ; \; -8 \; ; \; -27$

5. اكتب كلاّ مما يأتي على الشكل a^n

أ) $3^2 \times 3^4$ ، $7^1 \times 7^4$ ، $(-5)^3 \times (-5)^1$ ، $3^1 \times 81$

ب) $(12)^0$ ، $[(-5)^1]^1$ ، $[(-4)^1]^2$ ، $\frac{2^5}{2^3}$

ج) $2^1 \times 16$ ، $4^3 \times 27$ ، $\frac{6^3 \times 6}{6^2}$ ، $2^3 \times 5^6 \times 2^4$

6. أكمل الفراغات الآتية بالعدد المناسب:

$3^{\square} = 3^4 \times 3^{\square}$ ، $3^{\square} = \frac{3^{\square}}{3^2}$ ، $3^{\square} = \frac{3^4 \times 3^{\square}}{3^2}$ ، $\left(3^{\square}\right)^{-2} = 3^{10}$

7. أ) تحقّق من أنّ كلاّ من المجاميع المقابلة هو مربّع عدد طبيعي

$A = 1 + 3$

$B = 1 + 3 + 5$

$C = 1 + 3 + 5 + 7$

ب) اكتب المجموع الذي يلي المجموع C، ثمّ تحقّق أنه يساوي 16.

ج) استنتج ناتج المجموع $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$

8. إذا علمت أنّ في الإعلام الآلي البايت (Bits) هو أصغر وحدة معلوماتية يمكنها أن تحمل إحدى القيمتين 0 أو 1، وكل ثمانية بايت تكوّن ما يسمى بالأكتي (Octet) مثل: 10111000، فما هو عدد القيم الممكنة التي يمثلها الأكتي؟

حلول التمارين

1. أ) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ و $2 \times 3 = 6$.
ب) $5^2 = 5 \times 5 = 25$ و $5 \times 2 = 10$.
ج) $1^9 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$
د) $1,3^2 = 1,3 \times 1,3 = 1,69$ و $1,3 \times 2 = 2,6$.
هـ) $0,5^3 = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,125$.

2. أ) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
ب) $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$ و $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
ج) $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$ ، $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125}$
$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$

3. الأعداد التي كلّ منها مربّع لعدد صحيح نسبي هي: $121, 16, 9, 1, 0, 25, 4$

4. الأعداد التي كلّ منها مكعّب لعدد صحيح نسبي هي: $-27, -8, -1, 0, 27, 1, 8$

5. أ) $7^5 \times 7^4 = 7^{5+4} = 7^9$ ، $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
$3^2 \times 81 = 3^2 \times 3^4 = 3^6$ ، $(-5)^3 \times (-5) = (-5)^{3+1} = (-5)^4 = 5^4$
ب) $[(-5)^3]^2 = (-5)^{3 \times 2} = (-5)^6 = 5^6$ ، $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$
$\frac{2^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3$ ، $[(-4)^3]^3 = (-4)^{3 \times 3} = (-4)^{15} = -4^{15}$
ج) $4^3 \times 27 = 4^3 \times 3^3 = 12^3$ ، $32 \times 3^5 = 2^5 \times 3^5 = 6^5$
$2^2 \times 5^6 \times 2^4 = 2^{2+4} \times 5^6 = 2^6 \times 5^6 = 10^6$ ، $\frac{6^3 \times 6}{6^5} = 6^{3+1-5} = 6^{-1}$

6. $3^4 \times 3^3 = 3^7$ ، $\frac{3^7}{3^2} = 3^5$ ، $\frac{3^4 \times 3^5}{3^2} = 3^7$ ، $(3^{-1})^{-2} = 3^{10}$

7. أ) $A = 1 + 3 = 4 = 2^2$
$B = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$C = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
ب) المجموع الذي يلي المجموع C : $D = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$
التحقّق أنّه يساوي 5^2 : $D = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$
ج) $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 11^2$

8. عدد القيم الممكنة التي يمثلها الأكتي هو:
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$

الإجابة خطأ. لأنّ: $\frac{10^3}{2} = \frac{(5 \times 2)^3}{2} = \frac{5^3 \times 2^3}{2} = 5^3 \times 2^2$

إرشادات وتوجيهات

- لاحظ أنّ $3^1 = 3 \times 2$ و $5^1 = 5 \times 2$
- $9 \times 1 = 1^9$ و $2 \times 1,3 = 1,3^2$
- نعلم أنّ 2^{-3} هو مقلوب 2^3.
- لاحظ أنّ: $(-5)^{-3} = (5)^{-3}$ و $(-5)^3 = (5)^3$
- a هو مربّع b معناه $a = b^2$
- a هو مكعّب b معناه $a = b^3$
- نطبق خواص القوة، وهي:
  - $a^m \times a^n = a^{m+n}$
  - $(a^m)^n = a^{m \times n}$
  - $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  - $a^n \times b^n = (ab)^n$
- في التمرين 7 لاحظ أن حد كلّ مجموع هي أعداد فر متتالية. وفي كلّ حالة تحص مجموعها يساوي مربع عدد
- البايت الأولى لها إمكان والثانية لها إمكانيتين وال لها إمكانيتين وهكذا الثامنة لها إمكانيتين أي: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

14 القوى ذات أسس صحيحة نسبية (5)

الكفاءات المستهدفة • إجراء حساب يتضمن قوى.

مكتسبات

• العمليات على الأعداد العشرية.
• مقارنة عددين عشريين.

ما يلزمك معرفته

1. أولوية القوة

عند إجراء حساب يتضمن قوى:

• في غياب الأقواس، تعطى الأولوية لحساب القوة على كلّ من الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

أمثلة:

$5+3^2 = 5+9 = 14$
$5-3^2 = 5-9 = -4$
$18\div 3^2 = 18\div 9 = 2$
$5\times 3^2 = 5\times 9 = 45$

• عند وجود أقواس، نبدأ بحساب ما داخل الأقواس.

2. الآلة الحاسبة

• اللمسة x^2 تمكّن من حساب مربّع عدد.
• اللمسة x^y أو $\wedge$ تمكّن من حساب قوة أي عدد.
• بعض الآلات تستعمل اللمسة $\boxed{\wedge}$ مثال:

لحساب 2^{-4} ننجز من اليسار إلى اليمين: $\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{+/-}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

فيظهر على شاشة الحاسبة: $\boxed{0.0625}$

لحساب $(-2)^5$ ننجز من اليسار إلى اليمين: $\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{5}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$

فيظهر على شاشة الحاسبة: $\boxed{-32}$

• ملاحظة أنّ هذه البرامج ليست نفسها في كلّ الآلات الحاسبة، فبعضها يحسب كما يأتي:

$\boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

تمارين

1. أحسب كلاً مما يأتي.

أ) $7+3\times 10^3$ ب) $(3^2-1)\times 2^{-3}$ ج) $7+\frac{3^2}{10}$

د) $\frac{4\times 10^3\times 0,0021}{1400}$ هـ) $8\times 7,351\times 50^3$ و) $(9+2)^2+(3^2-4^2)$

2. عيّن إشارة النتائج في كلّ مما يأتي، ثمّ احسبه باستعمال آلة حاسبة.

أ) x^{-2} ب) $(-3)^7$ ج) $(-0,2)^{-5}$ د) $(-1,5)^6$

3. احسب كلاً مما يأتي، واكتب النّاتج على الشكل العلمي.

أ) $\frac{9,2\times 10^3-0,5\times 10^4}{0,2\times 10^3}$ ب) $\frac{412\times 10^{-4}+30,6\times 10^{-3}}{0,04}$

ج) $6\times 10^{22}-4213\times 10^{19}$ د) $6\times 10^{-19}+4213\times 10^{-22}$

4. تحقق من نتائج التمرين السابق باستعمال الآلة الحاسبة.

5. نُعطى $A=x^2+y^3$ و $B=A+1$. اكتب كلاً من العددين A و B على الشكل العلمي من أجل $x=-1,3$ و $y=5$.

6. احسب $(x+y)^2$ و $x^2+2xy+y^2$ في كلّ من الحالتين.

أ) $x=3$ و $y=5$ ب) $x=7$ و $y=-2$

7. اكتب على أبسط شكل ممكن كلاً من العددين.

أ) $\frac{(2\times 7^{-3})^3\times 14^2}{(4\times 7^{-1})^2}\times\frac{-1}{49}$ ب) $\left(\frac{5}{3}\right)^{66}\times(-0,6)^{67}$ (إرشاد $0,6=\frac{3}{5}$)

8. a عدد نسبي غير معدوم، اكتب كلاً مما يأتي على أبسط شكل ممكن.

أ) $3a\times 5a$ و $3a+5a$ ب) $2a\times(-2a)^3$ ج) $\left(\frac{2}{a}\right)^2\times\frac{a^3}{-4}$

9. سلك ناقل للكهرباء تجتازه كمية كهرباء مقدارها $576\ C$ (كُلون) خلال دقيقة واحدة إذا علمت أنّ شحنة الإلكترون تساوي $1,6\times 10^{-19}\ C$ فما هو عدد الإلكترونات التي تجتاز هذا السلك خلال دقيقة؟

صحيح أم خطأ؟ $(2^3)^2 < (5^2)^3$، لأن $2<5$.

حلول التمارين

1. 1) $7+3\times10^2=7+3\times100=7+300=307$

ب) $(5^2-1)\times2^{-3}=(25-1)\times\frac{1}{2^3}=\frac{24}{8}=3$

ج) $7+\frac{3^2}{10}=7+\frac{9}{10}=7+0.9=7.9$

د) $\frac{(4\times10^5\times0.0021}{1400}=\frac{(\cancel{4}\times2)\times10^5\times(\cancel{7}\times3)\times10^{-4}}{(\cancel{7}\times\cancel{7})\times10^2}=6\times10^{5-4-2}=6\times10^{-1}=0.6$

هـ) $8\times7.351\times50^3=\underline{8}\times7.351\times\underline{5^3}\times10^3=\underline{10^3}\times7.351\times10^3=7.351\times10^6$

و) $(9+2)^2\div(3^3-4^2)=11^2\div(27-16)=11^2\div11=11$

1. 2) $8^{-2}=0.015625$ ب) $(-3^7)=(-3^7)=-2187$ ج) $(-0.2)^{-5}=-3.125\times10^{-5}$

د) $(-1.5)^6=(1.5)^6=11.390625$

1. 3) $\frac{9.2\times10^3-0.5\times10^4}{0.2\times10^3}=\frac{9.2\times10^3-5\times10^3}{0.2\times10^3}=\frac{(9.2-5)\times10^{\cancel{3}}}{0.2\times10^{\cancel{3}}}=\frac{4.2}{0.2}=21$

الكتابة العلمية هي: 2.1×10

ب) $\frac{412\times10^{-4}+30.6\times10^{-3}}{0.04}=$

$\frac{412\times10^{-4}+30.6\times10^{3}}{40\times10^{-3}}=\frac{(41.2+30.6)\times10^{-3}}{40\times10^{-3}}=\frac{71.8}{40}=1.795$

الكتابة العلمية هي: $1.795\times10^0=1.795$

ج) 1.787×10^{22} $(6\times10^{22}-4213\times10^{19}=(6-4.213)\times10^{22}$.

الكتابة العلمية هي: 1.787×10^{22}

د) 10.213×10^{-19} $(6\times10^{-19}+4213\times10^{-22}=(6+4.213)\times10^{-19}$.

الكتابة العلمية هي: 1.0213×10^{-18}

4. التحقق باستعمال الآلة الحاسبة

5. $A=(-1.3)^2\times5^3=1.3^2\times5^3=211.25=2.1125\times10^2$

$B=2.1125\times10^2+1=211.25+1=212.25=2.1225\times10^2$

1. 6) $(x+y)^2=(3+5)^2=8^2=64$

$x^2+2xy+y^2=3^2+2\times3\times5+5^2=64$

ب) $(x+y)^2=(7-2)^2=5^2=25$.

$x^2+2xy+y^2=7^2+2\times7\times(-2)+2^2=25$

1. 7) $\frac{(2\times7^{-2})^3\times14^2}{(4\times7^{-3})^2}\times\frac{-1}{49}=\frac{2^3\times\cancel{7}^{\cancel{6}}\times2^2\times\cancel{7}^{\cancel{4}}}{2^4\times\cancel{7}^{\cancel{6}}}\times\frac{-1}{\cancel{7}^{\cancel{2}}}=-2^{3+2-4}=-2$

ب) $\left(\frac{5}{3}\right)^{66}\times(-0.6)^{67}=\left(\frac{5}{3}\right)^{66}\times\left(-\frac{3}{67}\right)^{67}=\frac{5^{66}\times3^{6+}}{3^{66}\times5^{67}}=-\frac{\cancel{5^{66}}\times\cancel{3^{66}}\times3}{\cancel{3^{66}}\times\cancel{5^{66}}\times5}=-\frac{3}{5}$

1. 8) $3a\times5a=15a^2$ و $3a+5a=8a$ ب) $2a\times(-2a)^3\ 5=-16a^4$

9. عدد الإلكترونات التي تجتاز هذا السلك خلال دقيقة تساوي:

$\frac{576}{1.6\times10^{-19}}=360\times10^{19}$ ، ومنه عدد الإلكترونات يساوي 36×10^{20}

الإجابة خطأ.

إرشادات وتوجيهات

- عند عدم وجود الأقواس، نعطي الأولوية لحساب القوة على كلّ من الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة
- عند وجود أقواس، نبدأ بحساب ما داخل الأقواس.
- يستحسن البدء بالاختزال إن كان ممكنا.

- في التمرين 2 الجزء (ج)

$(-0.2)^{-5}=\frac{1}{(-0.2)^5}$

$-\frac{1}{0.2^5}=-\frac{1}{3.2\times10^4}$

$=3.125\times10^{-5}$

- في التمرين 3 نتخلص من 10^3 كلّ من البسط والمقام إما بتطبيق قواعد القوة أو بالاختزال، وكتابة بالنسبة إلى 10^{-3}.

- لاحظ أنّ:

$a^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

تابع لحل التمرين 7.

ج) $\frac{a^3}{-4}=\frac{-4}{a^3}\times\frac{a^3}{4}=-a$

15 الحساب الحرفي (1)

الكفاءات المستهدفة

- تبسيط عبارة جبرية.
- استعمال قاعدة حذف الأقواس.

مكتسبات

- العمليات على الأعداد النسبية.
- حساب قوة عدد نسبي.

ما يلزمك معرفته

1 العبارة الجبرية

تتميز العبارة الجبريّة بوجود حرف أو أكثر فيها يمثّل (أو تمثّل) أعدادا.

مثال:

$2a+5$ مجموع الحدين 5 و $2a$

$-5x(7+3y)$ جداء العوامل -5 و x و $7+3y$.

2 تبسيط عبارة جبرية

في مجموع هو جمع الحدود المتشابهة.

مثال: $3x-5+4x=7x-5$

في جداء هو إنجاز عمليات الضرب، والقوى.

مثال: $-4x^3 \times 5x^2 = -20x^5$

3 قاعدة حذف الأقواس

a, b, c, k أعداد نسبية

$a+k(b-c)=a+kb-kc$

$a+(b-c)=a+b-c$ نجد $k=1$

نحذف الأقواس المسبوقة بالإشارة + دون أيّ تغيير على إشارة ما بداخلها.

$a-(b-c)=a-b+c$ نجد $k=-1$

يمكن حذف الأقواس المسبوقة بالإشارة − بشرط تغيير إشارة كلّ الحدود داخلها.

تمارين

1. لاحظ المثال الآتي، ثمّ أكمل على منواله ما يتبعه.

مثال: $\frac{2}{5+3}$ هو حاصل قسمة 2 على مجموع العددين 5 و3.

أ) $2+5\times3$ هو ... ب) $(2+5)\times3$ هو ...

ج) $2+\frac{5}{3}$ هو ... د) $2\times\frac{5}{3}$ هو ...

2. عين العبارات المكتوبة على شكل مجموع، ثمّ العبارات الجبريّة المكتوبة على شكل جداء فيما يأتي.

$x+7$ ، $x(x+1)$ ، $(x+5)^2$ ، $(1+x)(1-x)+x$ ،

$-3(x-2)+2(-x+1)$ $x[2-(x+4)]$

3. بسّط كلاّ مما يأتي.

$3x+2x$ ، $3+2x-5$ ، $3x^2+2x^2$ ، $3x+7x^2-2x^2$

$-4x+3x^2+7x-2x^2$ ، $2x\times x+2x\times3+(-4)\times x+(-4)\times3$

4. نفس السؤال من أجل.

$-5\times2x$ ، $3x\times2x$ ، $2x(-5x)$ ، $x(3x^4)$ ، $3\times5x+7(-2x)$

5. إحذف الأقواس وغيّر ما ينبغي تغييره في كلّ من العبارات الآتية، ثمّ بسّط الناتج.

$3+(x+7)$ ، $3-(x+7)$ ، $(2n+3)+(n+1)$ ، $(2n+3)-(n-1)$

6. إحذف الأقواس الزّائدة فقط في كلّ ممّا يأتي:

$(a+2)+(b-c)$ ، $(a+2)-(b-c)$ ، $2+(3\times(4+5))$

$2-(3\times(4+5))$ ، $(a+2)+(3(b-c))$

7. أكمل الفراغات بالعبارة الجبريّة المناسبة.

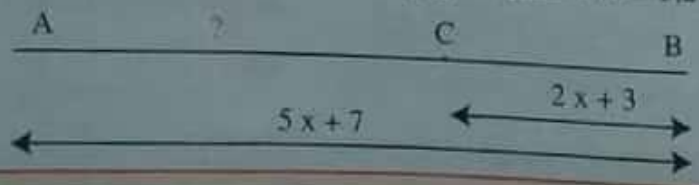
أ) $-7a+\ldots=-12a$ ب) $\ldots-7a=-5a$

ج) $-7a(\ldots)=-21a^2$ د) $-36a(\ldots)=4a^3$

8. وحدة الطول هي السّنتيمتر، و x عدد عشريّ.

أ) باستعمال معطيات الشكل عبّر عن الطول AC بدلالة x.

علما أنّ $x=5,2$، احسب الأطوال AB و BC و AC.



صحيح أم خطأ؟ من أجل كل عدد x، المساواة $x^2-3x-7+x-(x-3x-2+x^2)=-5$ صحيحة.

حلول التمارين

1. أ) $3 \times 5 + 2$ هو مجموع العدد 2 وجداء العددين 3 و 5.
ب) $3 \times (5 + 2)$ هو جداء مجموع العددين 2 و 5، بالعدد 3.
ج) $\frac{5}{3} + 2$ هو مجموع العدد 2 وحاصل قسمة العدد 5 على العدد 3.
د) $\frac{5}{3} \times 2$ هو جداء العدد 2 وحاصل قسمة العدد 5 على العدد 3.

2. العبارات المكتوبة على شكل مجموع هي :
$x + 7$ ، $(1 + x)(1 - x) + x$ ، $-3(x - 2) + 2(-x + 1)$
العبارات المكتوبة على شكل جداء هي :
$x(x + 1)$ ، $(x + 5)^2$ ، $x[2 - (x + 4)]$

3. $3x + 2x = 5x$ ، $3 + 2x - 5 = 2x - 2$ ، $3x^2 + 2x^2 = 5x^2$
$3x + 7x^2 - 2x^2 = 3x + 5x^2$ ، $-4x + 3x^2 + 7x - 2x^2 = 3x + x^2$
$2x \times x + 2x \times 3 + (-4) \times x + (-4) \times 3 = -12 + 2x + 2x^2$

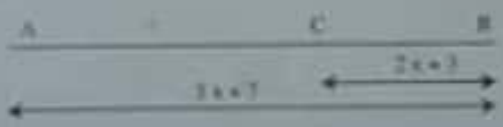
4. $3x \times 2x = (3 \times 2)(x \times x) = 6x^2$ ، $-5 \times 2x = (-5 \times 2)x = -10x$
$3 \times 5x + 7(-2x) = x$ ، $x(3x^4) = 3x^5$ ، $2x(-5x) = -10x^2$

5. $3 + (x + 7) = 3 + x + 7 = x + 10$ ، $3 - (x + 7) = 3 - x - 7 = x - 4$
$(2n + 3) + (n + 1) = 2n + 3 + n + 1 = 3n + 4$ ،
$(2n + 3) - (n - 1) = 2n + 3 - n + 1 = n + 4$

6. $(a + 2) + (b - c) = 2 + a + b - c$ ، $(a + 2) - (b - c) = a + 2 - (b - c)$
$2 + [3 \times (4 + 5)]$ ، $2 + [3 \times (4 + 5)] = 2 + 3 \times (4 + 5)$
$(a + 2) + [3(b - c)] = a + 2 + 3(b - c)$

7. أ) $-7a + (-5a) = -12a$ ب) $2a - 7a = -5a$
ج) $-7a(3a) = -21a^2$ د) $-36a\left(-\frac{a^2}{9}\right) = 4a^3$

8.



أ) $AC = AB - BC = (5x + 7) - (2x + 3)$
$= 5x + 7 - 2x - 3 = 3x + 4$
ب) $AC = 3 \times 2.5 + 4 = 11.5$ ، $BC = 2 \times 2.5 + 3 = 8$ ،
$AB = 5 \times 2.5 + 7 = 19.5$

ارشادات وتوجيهات

• قراءة السلسلة يكون من اليسار إلى اليمين

لجمع الحدود المتشابهة نطبق خاصيتي توزيع الضرب على الجمع أو على الطرح، مثل:

$3x + 2x = (3+2)x$
$= 5x$
و
$3x + 7x^2 - 2x^2 = 3x + (7-2)x^2$
$= 3x + 5x^2$

• لاحظ الذي يتغير فيما يأتي :
$a + (b - c) = a + b - c$
$a - (b - c) = a - b + c$

• القوس الزائدة في عبارة جبرية هي القوس التي يمكن حذفها دون أن يحدث أي تغيير على العبارة

• العبارة $2 - (3 \times (4 + 5))$ لا توجد فيها أقواس زائدة

الإجابة صحيح لأن : $x^2 - 3x - 7 + x - (x - 3x - 2 + x^2) = x^2 - 3x - 7 + x - x + 3x + 2 - x^2 = -5$

16 الحساب الحرفي (2)

الكفايات المستهدفة

- نشر عبارات جبرية من الشكل $(x+a)(x+b)$ حيث a و b و x أعداد نسبية.
- اختبار نتيجة حساب حرفي.

تمارين

1. انشر كلاً من العبارات الآتية:
$2(3+x)$ ، $-4(-2x-3)$ ، $x(x+1)$ ، $-2x(7x^2-5x)$

2. انشر كلاً من العبارات الآتية وبسّط الناتج إن أمكن:
$a=2(3x+1)-4(x-2)$ ، $b=(x-2)\times 5+(4-x)\times(-7)$
$c=6x(x+1)-2(x^2-2)$ ، $d=x^2-2(x-\frac{1}{2})$

3. الأقواس المرسومة في الشكل المقابل هي أنصاف دوائر. قارن بين طول القوس ذات اللون الأسود ومجموع أطوال الأقواس ذات اللون البرتقالي.

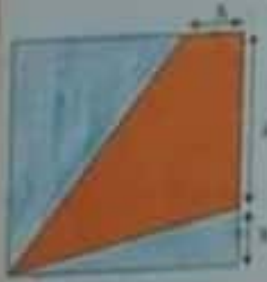
4. انشر كلاً من العبارات الآتية وبسّط الناتج:
$(2x+5)(x+1)$ ، $2x+5(x+1)$ ، $(2x-7)(-x+4)$
$(-4+7x)(x-1)$ ، $(x+3)^2$ ، $(x-3)^2$ ، $(2x+5)^2$

5. 1) انشر كلاً من العبارات الآتية وبسّط الناتج:
$A=3x^2-(x-2)(3x+1)$
$B=(x-5)(-x+3)-(x+2)^2$
ب) اختبر نتيجة حسابك من أجل $x=0,5$. ثمّ من أجل $x=-1$.

6. ضع الأقواس في المكان المناسب حتّى تكون المساواة صحيحة في كلّ مما يأتي:
$5x-10=5x-2$ ، $8+2x^2=2\times 4+x$ ، $-3x-5=-3x+1-2$
$6+3x-12y=6+3x-4y$ ، $6+3x-12y=3\times 2+x-12y$

7. 1) انشر وبسّط ما يأتي: $A=(x-1)(x+1)$
ب) استنتج طريقة لحساب كلّ من 101×99 و 103×97 بسرعة.

8. وحدة الطول هي السنتيمتر. a و x عددان عشريان.
1) باستعمال معطيات الشكل عبّر عن كلّ من مساحة المربّع وكذا مساحة الجزء الملوّن بدلالة a و x.
ب) استنتج العلاقة بين مساحة المربّع ومساحة الجزء الملوّن.



9. 1) احسب بدلالة x مساحة الجزء الملوّن. وبسّط الناتج.
ب) علماً أنّ $x=2$. احسب الأطوال المبيّنة في الشكل، ومساحة الجزء الملوّن بطريقتين.

مكتسبات

- العمليات على الأعداد النسبية
- حساب قوة عدد نسبي

ما يجب معرفته

1. نشر عبارة جبرية

هو كتابة عبارة الجداء على شكل مجموع.

مثال: $2(3x+4)=6x+8$

2. تعميم النشر

a ، b ، c ، d أعداد نسبية

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

$(a+b)(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$

3. تحليل عبارة جبرية

هو كتابتها على شكل جداء عوامل.

مثال: $15x-10x=5x(3x-2)$

4. اختبار مساواة عبارتين

معناه حساب قيمتي العبارة المعطاة والعبارة الناتجة من أجل نفس القيمة العددية للحرف، أو نفس القيم العددية للحروف فيها.

صحيح أم خطأ؟ قيمة العبارة الجبرية $x^2-(x-1)(x+1)$ لا تتعلق بقيمة العدد x.

حلول التمارين

1 $-4(-2x-3)=8x+12$ ؛ $2(3+x)=2\times3+2\times x=6+2x$

$-2x(7x^2-5x)=-14x^3+10x^2$ ؛ $x(x+1)=x^2+x$

2 $a=2(3x+1)-4(x-2)=6x+2-4x+8=2x+10$

$b=(x-2)\times5+(4-x)\times(-7)=5x-10-28+7x=12x-38$

$c=6x(x+1)-2(x^2-2)=6x^2+6x+2x^2+4=4x^2+6x+4$

$d=x^2-2(x-\frac{3}{2})=x^2-2x+3$

3 نفرض r_1, r_2, r_3 أقطار أنصاف الدوائر كما في الشكل، فيكون

طول الأقواس ذات اللون الأسود يساوي: $\frac{1}{2}(r_1+r_2+r_3)\pi$

ومجموع أطوال الأقواس ذات اللون البرتقالي يساوي: $\frac{1}{2}r_1\pi+\frac{1}{2}r_2\pi+\frac{1}{2}r_3\pi$

لكن: $\frac{1}{2}(r_1+r_2+r_3)\pi=\frac{1}{2}r_1\pi+\frac{1}{2}r_2\pi+\frac{1}{2}r_3\pi$

وبالتالي فإن طول الأقواس ذات اللون الأسود يساوي

مجموع أطوال الأقواس ذات اللون البرتقالي

4 $(2x+5)(x+1)=2x^2+2x+5x+5=2x^2+7x+5$

$2x+5(x+1)=2x+5x+5=7x+5$

$(2x-7)(-x+4)=-2x^2+8x+7x-28=-2x^2+15x-28$

$(-4+7x)(x-1)=7x^2-11x+4$

$(2x+5)^2=(2x+5)\times(2x+5)=4x^2+20x+25$

5 1) $A=3x^2-(x-2)(3x+1)=3x^2-(3x^2+x-6x-2)=5x+2$

$B=(x-5)(-x+3)-(x+2)^2=-x^2+8x-15-(x^2+2x+2x+4)$

$=-x^2+8x-15-x^2-2x-2x-4=-2x^2+4x-19$

ب) من أجل $x=0,5$ نعوض في $3x^2-(x-2)(3x+1)$ فنجد:

$A=3\times0,5^2-(0,5-2)(3\times0,5+1)=0,75-(-1,5)(2,5)=4,5$

• ونعوض في $(5x+2)$ فنجد $A=5\times0,5+2=4,5$، أي نفس النتائج

وبنفس الطريقة نجد: $B=(0,5-5)(-0,5+3)-(0,5+2)^2=-17,5$

و $B=-2\times0,5^2+4\times0,5-19=-17,5$

6 $8+2x=2\times(4+x)$ ، $5x-10=5(x-2)$

$-3x-5=-3(x+1)-2$ ، $6+3x-12y=3\times(2+x)-12y$

$6+3x-12y=6+3(x-4y)$

7 1) $A=(x-1)(x+1)=x^2+x-x-1=x^2-1$

ب) $99\times101=(100-1)\times(100+1)=100^2-1=10000-1=9999$

$97\times103=(100-3)\times(100+3)=100^2-3^2=10000-9=9991$

8 1) نفرض أنّ مساحة المربع A، وأنّ مساحة الجزء الملوّن A_2.

إنّ الجزء غير الملوّن مكوّن من مثلثين قائمين. نفرض مساحتها A_1، فيكون:

$A=(x+a)\times(x+a)=x^2+2ax+a^2$

$A_1=\frac{a(a+x)}{2}+\frac{x(a+x)}{2}=\frac{a^2+2ax+x^2}{2}$

$A_2=A-A_1=x^2+2ax+a^2-\frac{x^2+2ax+a^2}{2}=\frac{x^2+2ax+a^2}{2}$

ب) الاستنتاج: $A=2A_2$

إرشادات وتوجيهات

• تذكّر:

$a(c+d)=ac+ad$

$a\times x=ax$

$x\times x=x^2$

$x^n\times x^m=x^{n+m}$

• محيط الدائرة التي قطرها R يساوي $R\pi$.

• ننشر باستعمال ما يأتي:

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

$(x+3)^2=(x+3)\times(x+3)$

$=x^2+6x+9$

$(x-3)^2=(x-3)\times(x-3)$

$=x^2-6x+9$

• في التمرين 5 من أجل

نجد $A=-13$ و $B=-49$

$x=-3$

• لاحظ أن: $99=100-1$

و $101=100+1$

وكذلك: $97=100-3$

و $103=100+3$

• مساحة المربّع تساوي مربّع طول ضلعه

• مساحة المثلث تساوي نصف جداء قاعدته وارتفاعه

• مساحة المستطيل تساوي جداء بعديه

17 الحساب الحرفي " المعادلات والمتباينات" (1)

الكفاءات المستهدفة

- مقارنة عددين ناطقين.
- معرفة الخواص المتعلقة بالمساويات والعمليات واستعمالها في وضعيات بسيطة.

تمارين

1. عين أكبر العددين في كلّ ممّا يأتي. وبرّر جوابك.

أ) $\frac{39}{3}$ و $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{5}{1}$ و $\frac{3}{-1}$ ج) $\frac{-6.2}{1}$ و $\frac{6.2}{-1}$

2. احسب فرق العددين في كلّ ممّا يأتي، واستنتج ترتيبهما.

أ) $\frac{-7}{3}$ و $\frac{-5}{3}$ ب) $\frac{5}{1}$ و $\frac{4}{2.1}$ ج) $\frac{30}{-7}$ و $\frac{-9}{2.1}$

3. هل العددان متساويان في كلّ ممّا يأتي ؟

أ) $\frac{219}{21}$ و $\frac{-361}{35}$ ب) $\frac{12}{-1}$ و $\frac{12}{1}$ ج) $\frac{4.08}{2.6}$ و $\frac{6.12}{3.9}$

4. هل يمكنك تحديد أي العددين b و a أكبر في كلّ ممّا يأتي ؟

أ) $a-b\geq 3$ ب) $a-b\leq -0.75$ ج) $a-b\leq 3$

5. اكتب الأعداد الطبيعية x حيث $x\geq 3$ و $x<10$.

6. اكتب الأعداد الصحيحة النسبية x في كل حالة ممّا يأتي

أ) $-2\leq x\leq 2$ ب) $-2<x<2$

7. مثل على مستقيم مدرّج مجموعة الأعداد x المحققة للعلاقة $-2<x\leq 3$.

8. وحدة الطول هي السنتيمتر، و x عدد عشري. باستعمال معطيات الشكل قارن بين مساحة المربّع و مساحة المستطيل.

9. إذا علمت أنّ $a=b+4$، فأكمل كلاّ من :

$a+5=b+\ldots$ و $a-5=\ldots$ و $7a-8=\ldots$

10. إذا علمت أنّ $a+3=b-7$، فبيّن أنّ :

أ) $a=b-10$ ب) $-3a-15=-3b+15$

11. إذا علمت أنّ $21-2a=-4b+13$ فبيّن أنّ $a=2b+4$

12. ليكن $A=(x-1)(x+2)$ و $B=(x-1)^2$

أ) قارن بين A و B من أجل $x=-\frac{3}{2}$.

ب) بيّن أنّه إذا كان $A=B$ فإنّ $x=1$.

مكتسبات

- مقارنة كسرين.
- مقارنة عددين نسبيين.

ما يلزمك معرفته

1. [illegible] a و b

يمكن أن نعوض فرقهما $a-b$.

$a-b>0$ يعني $a>b$

$a-b<0$ يعني $a<b$

$a-b=0$ يعني $a=b$

- إذا كان a أكبر من b أو يساويه أي [illegible] أو [illegible] نكتب [illegible]
- نكتفي بالنسبة إلى $a\leq b$ نعني [illegible]

مثال : للتعبير عن الأعداد الطبيعية [illegible] يمكن أن نكتب

x عدد طبيعي و $x>2$

أو x عدد طبيعي و $x\geq 3$

- a, b, c, d أعداد نسبية حيث a و d غير معدومين.

1. [illegible] معناه [illegible]

2. [illegible]

[illegible] a, b, c [illegible] أعداد ناطقة

إذا $a=b$ فإنّ $a+c=b+c$

إذا a [illegible] فإنّ $a-c=b-c$

إذا $a=b$ فإنّ $a\times c=b\times c$

إذا $a=b$ و $c\neq 0$ فإنّ $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

- إذا كان للعددين b و d نفس الإشارة* فإنّ العددين $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$ حسب ترتيب العددين $b\times c$ و $a\times d$

صحيح أم خطأ ؟ $\frac{2}{-3}<\frac{14}{-3}$ لأن $2<14$

حلول التمارين

1. أ) $\frac{-39}{-7} > \frac{1}{2}$ لأن العدد الموجب أكبر تماما من العدد السالب

ب) $\frac{5}{3} < \frac{5}{-3}$ لأن العدد الموجب أكبر تماما من العدد السالب

جـ) $\frac{-6.2}{7} = \frac{6.2}{-7}$ ، لأن كلا منهما يساوي $\frac{6.2}{7}$ -

2. أ) $-\frac{1}{6} = \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{-5}{2}$ ، ومنه $\frac{-5}{2} < \frac{-7}{3}$

ب) $\frac{5}{21} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{2.1}$ ومنه $\frac{4}{2.1} > \frac{5}{3}$ ، جـ) $0 = \frac{30}{7} + \frac{-9}{2.1}$ ومنه $\frac{-9}{2.1} = \frac{30}{-7}$

3. أ) $0 = \frac{-365 \times 3 + 219 \times 5}{105}$ ، $\frac{-365}{35} = \frac{-219}{21}$ ، ومنه $\frac{-365}{35} = -\frac{219}{21}$

ب) $\frac{24}{7} = \frac{12}{7} - \frac{12}{-7}$ ، ومنه $\frac{12}{7} \neq \frac{12}{-7}$

جـ) $0 = \frac{61.2 \times 2 - 40.8 \times 3}{78}$ ، $\frac{61.2}{39} = \frac{40.8}{26}$ ومنه $\frac{6.12}{3.9} = \frac{4.08}{2.6}$

4. أ) $a > b$ لأنّ $a - b > 0$ ب) $a < b$ لأنّ $a - b < 0$

جـ) $a - b \leq 3$ لا يمكنك تحديد أيّ العددين a و b أكبر

5. الأعداد الطبيعية x حيث $x \geq 3$ و $x < 10$ هي: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3.

6. الأعداد الصحيحة النسبية x حيث:

أ) $-2 \leq x \leq 2$ هي: $-2, -1, 0, 1, 2$

ب) $-2 < x < 2$ هي: $-1, 0, 1$

7. تمثيل الأعداد x المحققة للعلاقة $-2 < x \leq 3$

8. مساحة المربع تساوي: $(x + 3) \times (x + 3) = x^2 + 18x + 9$.

مساحة المستطيل تساوي: $(x + 4) \times (x + 2) = x^2 + 16x + 8$.

بما أنّ x عدد عشري فإنّ $18x + 9 > 16x + 8$ ومنه

$(x^2 + 18x + 9) > (x^2 + 16x + 8)$ أي أنّ مساحة المربع أكبر من مساحة المستطيل.

9. $a - 5 = b + 4 - 5 = b - 1$ و $a + 5 = b + 4 + 5 = b + 9$ و

$7a - 8 = 7(b + 4) - 8 = 7b + 28 - 8 = 7b + 20$

10. أ) بما أنّ $a + 3 = b - 7$ فإنّ $a + 3 - 3 = b - 7 - 3$ يعني أن $a = b - 10$

ب) بما أنّ $a + 3 = b - 7$ فإنّه بالضرب في (-3) نجد $-3(a + 3) = -3(b - 7)$

أي $-3a - 9 = -3b + 21$ وبإضافة (-6) نجد $-3a - 9 + (-6) = -3b + 21 + (-6)$

وبالتالي $-3a - 15 = -3b + 15$

11. بما أن $-2a = -4b + 13$ فإنّ $-2a - 2 = -4b + 13 - 2$

ومنه $-2a - 8 = -4b$ ، وبالقسمة على -2 نجد $a = 2b + 4$

12. أ) من أجل $x = -\frac{1}{2}$ ، $A = -\frac{5}{4}$ فإنّ $B = \frac{25}{4}$ ومنه $B > A$

ب) إذا كان $A = B$ فإنّ $(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2$ أي:

$x^2 + x - 2 = x^2 - 2x + 1$ ومنه $x = 1$

الإجابة: لأنّ $\frac{2}{-3} < \frac{14}{-3}$ نكتب $\frac{-2}{3} < \frac{-14}{3}$ و $-2 > -14$

إرشادات وتوجيهات

- العدد الموجب أكبر تماما من عدد سالب.
- لترتيب عددين يمكن حساب فرقهما ومقارنته بالصفر، ومن نستنتج ترتيبهما
- نلاحظ أن: $105 = 5 \times 21$ و $105 = 3 \times 35$
- نلاحظ أن: $78 = 2 \times 39$ و $78 = 3 \times 26$
- نذكّر أن:
إذا كان $a = b$ فإنّ $a + c = b + c$
إذا كان $a = b$ فإنّ $a \times c = b \times c$

18 الحساب الحرفي " المعادلات والمتباينات" (2)

الكفاءات المستهدفة • معرفة الخواص المتعلقة بالمتباينات والعمليات واستعمالها في وضعيات بسيطة.

ملخصات

• مقارنة كسرين
• مقارنة عددين نسبيين

ما يلزمك معرفته

•

•

a ، b ، c ثلاثة أعداد ناطقة

العددان a و b مرتبان بنفس ترتيب العددين a و b

وكذلك بالنسبة إلى a و b

أي

• إذا كان $a < b$ فإن العددين a و b مرتبان بنفس ترتيب العددين a و b

نضرب الطرفين بالعدد c حيث $c > 0$

$a < b$ ⟶ $ac < bc$

نحافظ على اتجاه المتباينة

• إذا كان c سالبا فإن العددين a و b مرتبان عكس ترتيب العددين a و b

نضرب الطرفين بالعدد c حيث $c < 0$

$a < b$ ⟶ $ac > bc$

نعكس اتجاه المتباينة

• إذا كان $a < b$ و $c > 0$ فإن $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

• إذا كان $a < b$ و $c < 0$ فإن $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

• $x < b - a$ معناه $x + a < b$

أي نقل حد من طرف متباينة إلى آخر نغير إشارته

تمارين

1. دون إجراء أي حساب أكمل بأحد الرمزين > أو < وبرّر جوابك.

أ) $51 + 9,21 \ldots 763 + 9,21$ ب) $\frac{21}{4} \ldots \frac{1}{7}$ $\quad$ $\frac{57}{4} \ldots \frac{2}{7}$

ج) $5 \times 10^{-3} \ldots 2 \times 10^{-3}$ د) $4321 \times (-0,52) \ldots 4320 \times (-0,52)$

2. نعلم أنّ $-0,2 > -9$ ، قارن بين الجداءين في كل مما يأتي، وبرّر جوابك:

أ) $-0,2 \times 58 \ldots -9 \times 58$ ب) $-0,2 \times (-58) \ldots -9 \times (-58)$

3. إذا علمت أنّ $x < y$ ، فأكمل بأحد الرمزين > أو < كلاًّ من:

أ) $y + 7 \ldots x + 7$ ب) $y - 2,3 \ldots x - 2,3$

ج) $y + 0,01 \ldots x + 10^{-2}$ د) $y - \frac{5}{3} \ldots x - \frac{5}{3}$

4. إذا علمت أنّ $x < y$ ، فهل يمكنك أنّ تكمل بأحد الرمزين > أو < .

أ) $y + 9 \ldots x + 7$ ب) $y + 5 \ldots x + 7$

5. إذا علمت أنّ $x < y$ ، فأكمل بأحد الرمزين > أو < كلاًّ من:

أ) $5x \ldots 5y$ ب) $-72,3y \ldots -72,3x$

ج) $\frac{x}{-4} \ldots \frac{y}{-4}$ د) $\frac{32y}{9} + 2 \ldots \frac{32x}{9} + 2$

6. اشرح لماذا المتباينة $3x < 11$ تكتب $x < \frac{11}{3}$.

7. اشرح لماذا المتباينة $-3x < 11$ تكتب $x > -\frac{11}{3}$.

8. اكتب كلاًّ مما يأتي على الشكل $x > a$ أو $x < a$ ، حيث a عدد يطلب حسابه.

أ) $x - 6 > 8$ ب) $3 - x > 0$ ج) $1,2 - 4x < 6$

9. إذا علمت أنّ $a - 2 < b + 9$ ، فبيّن أنّ:

أ) $a < b + 11$ ب) $2a - 10 < 2b + 12$

10. إذا علمت أنّ $3a - 217 > 21b + 13$ فبيّن أنّ $a < -7b + 68$

صحيح أو خطأ؟ بما أنّ $-\frac{2}{3} > -\frac{1}{6}$ فإنّ $\frac{11}{-3} > \frac{3}{-6}$

حلول التمارين

1. أ) $763 > 51$ لأنّ $763 + 9{,}21 > 51 + 9{,}21$

ب) $\frac{2}{7} < \frac{57}{4}$ لأنّ $\frac{21}{4} < \frac{57}{4}$ ، $\frac{21}{4} = \frac{2}{7}$

ج) $10^{-3} > 0$ و $2 < 5$ لأنّ $2 \times 10^{-3} < 5 \times 10^{-3}$

د) $-0{,}52 < 0$ و $4321 > 4230$ لأنّ $4320 \times (-0{,}25) > 4321 \times (-0{,}52)$

2. بما أن $-0{,}2 > -9$ فإنّ:

أ) $-9 \times 58 < -0{,}2 \times 58$ لأنّ $58 > 0$

ب) $-9 \times (-58) > -0{,}2 \times (-58)$ لأنّ $-58 < 0$

3. علما أنّ $x < y$ فإنّ:

أ) $x + 7 < y + 7$

ب) $x - 2{,}3 < y - 2{,}3$

ج) $10^{-2} + x < y + 0{,}01$

د) $-\frac{5}{3} + x < y - \frac{5}{3}$

4. علما أنّ $x < y$ فإنّ:

أ) $x + 7 < y + 9$.

ب) لا يمكن أن تكمل العبارة $x + 7 \ldots y + 5$ بأحد الرمزين $<$ أو $>$

5. علما أنّ $x < y$ فإنّ:

أ) $5x < 5y$.

ب) $-72{,}3x > -72{,}3y$

ج) $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$

د) $\frac{32x}{9} + 2 < \frac{32y}{9} + 2$

6. المتباينة $3x < 11$ تكتب $x < \frac{11}{3}$ ، لأننا قسمنا طرفيها على العدد الموجب 3.

7. المتباينة $-3x < 11$ تكتب $x > -\frac{11}{3}$ لأننا قسمنا على العدد السالب -3.

8. أ) $x - 6 > 8$ يعني أنّ $x > 14$ (بإضافة 6 إلى الطرفين)

ب) $-x + 3 > 0$ يعني أنّ $x < 3$ (بإضافة -3 إلى الطرفين ثمّ ضرب كلّ منهما بالعدد (-1)).

ج) $1{,}2 - 4x < 6$ يعني أنّ $-4x < 6 - 1{,}2$ (بإضافة $-1{,}2$ إلى الطرفين)

أي $-4x < 4{,}8$ ومنه $x > -1{,}2$ (بقسمة كلّ من الطرفين على العدد (-4))

9. علما أنّ $a - 2 < b + 9$ فإنّ:

$a - 2 + 2 < b + 9 + 2$ (بإضافة 2 إلى الطرفين) ومنه $a < b + 11$

$2(a - 2) - 6 < 2(b + 9) - 6$ (بضرب كلّ من الطرفين بالعدد 2)

إضافة العدد -6 إلى كليهما) ومنه $2a - 10 < 2b + 12$

بما أنّ $217 - 3a > 21b + 13$ فإن $-3a > 21b + 13 - 217$

$\frac{21b - 204}{-3}$ وبالتالي $a < -7b + 68$

إرشادات وتوجيهات

- تذكر أنّ:

إذا $a > b$ فإنّ $a + c > b + c$

إذا $a > b$ فإنّ $a - c > b - c$

إذا $a > b$ و $c > 0$ فإنّ $ac > bc$

إذا $a > b$ و $c < 0$ فإنّ $ac < bc$

- عندما نضيف إلى طرفي متباينة نفس العدد فإنّها تحافظ على اتجاهها.

- عندما نضرب طرفي متباينة بعدد موجب فإنّها تحافظ على اتجاهها.

- عندما نضرب طرفي متباينة بعدد سالب فإنّها تغير اتجاهها.

- في التمرين 4 يمكن تبرير الجزء (أ) كما يأتي:

$y + 7 < (y + 7) + 2 = y + 9$

- في التمرين 6 يمكن القول: إننا ضربنا طرفي المتباينة بالعدد الموجب $\frac{1}{3}$.

- في التمرين 7 يمكن القول: إننا ضربنا طرفي المتباينة بالعدد السالب $-\frac{1}{3}$.

- آلية مفيدة جدا:

$x + a > b$ معناه $x > b - a$

في متباينة يمكن نقل حد مجموع من طرف إلى آخر بشرط تغيير إشارته.

الكفاءات المستهدفة

- حصر عدد موجب مكتوب في الشكل العشري، واستعماله للتدوير إلى رتبة معينة.
- حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد (تابع في البطاقة التالية).

مكتسبات

- العمليات على الأعداد الناطقة، والتدوير.

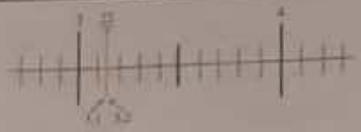
ما يلزمك معرفته

1 حصر عدد

يمكن حصر حاصل القسمة $\frac{a}{b}$ بعددين عشريين فرقهما 1 أو 0,1 أو 0,01 أو...

مثال: تعرض الحاسبة 3,142857143 كنتيجة لحاصل القسمة $\frac{22}{7}$ ومنه يمكن أن نكتب:

الحصر	فرق العددين
$3<\frac{22}{7}<4$	1
$3,1<\frac{22}{7}<3,2$	0,1
$3,14<\frac{22}{7}<3,15$	0,01



ملاحظة: كلما كان فرق العددين صغيرا كلما كان الحصر أدق.

- لإرفاق حاصل قسمة بقيمة مقربة يمكن استعمال تدوير كتابته العشرية.

2 المعادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد هي مساواة فيها مجهول أسه 1، ويرمز له عادة x.

مثالان: $3x-5=1$، $x+2=7-x$

حل معادلة ذات مجهول: معناه إيجاد قيم x التي تحقق المساواة، وتسمى كلّ قيمة منها حلا للمعادلة.

اجراءات وتقنيات

معادلة ذات مجهول x	حلّ المعادلة
$a+x=b$	$x=b-a$

تمارين

1. إليك العدد $\frac{50}{19}$.
أ) أنجز عملية القسمة $50 \div 19$ (يمكن استعمال آلة حاسبة).
ب) اكتب حصرا إلى الوحدة لحاصل القسمة $\frac{50}{19}$، ثمّ حصرا إلى 10^{-2}.
ج) عين المدوّر إلى الوحدة لحاصل القسمة $\frac{50}{19}$، ثمّ المدوّر إلى 10^{-2}.

2. نفس التمرين السابق من أجل العدد $\frac{425}{13}$.

3. اوجد المدوّر إلى 10^{-3} لمقلوب العدد 7.

4. a عدد ناطق غير نسبي (أي كتابته العشرية غير منتهية) مدوّره إلى 0,1 هو 47,6 اوجد كلّ القيم المقربة الممكنة للعدد a المكتوبة على الشكل العشري باستعمال رقمين على الأكثر بعد الفاصلة.

5. تعلم أنّه لكي يكون مثلث قابلا للإنشاء يلزم أنّ يكون مجموع طولي أي ضلعين منه أكبر من طول الضلع الثالث.
ABC مثلث فيه $AB=9$ و $BC=5$ (وحدة الطول هي السنتيمتر)، ما هو الشرط على الطول AC حتى يكون المثلث ABC قابلا للإنشاء.

6. قاست أميرة سبورة قسمها باستعمال المتر فوجدت أنّ عرضها L محصور بين 1,253 و1,254، وأنّ طولها L محصور بين 3,175 و3,176، ساعدها لإيجاد حصر لمحيط السبورة، وحصرا لمساحتها.

7. دون أنّ تحل، أرفق كل معادلة مما يأتي بحلّها.
أ) $8-x=2x-1$ ب) $3x-5=-2x$ ج) $3x-5=1$.
الحلول هي: 1 و 2 و 3.

8. حلّ المعادلات الآتية.
أ) $3x+8=14$
ب) $3(x-5)+2=2x$
ج) $x-2(4-x)=x-1$

9. اكتب معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد حلها العدد 4، وبحيث يكون المجهول موجود في الطرفين.

صحيح أم خطأ؟ إذا كان $7,2<a<7,3$ فإن $-21,9<-3a<-21,6$

حلول التمارين

1. أ) إنجاز عملية القسمة : $50 \div 19 = 2.631578947$

ب) حصر حاصل القسمة $\frac{50}{19}$ إلى الوحدة هو : $2 < \frac{50}{19} < 3$

حصر حاصل القسمة $\frac{50}{19}$ إلى 10^{-2} هو : $2.63 < \frac{50}{19} < 2.64$

ج) المدوّر إلى الوحدة لحاصل القسمة $\frac{50}{19}$ هو 3 والمدوّر إلى 10^{-2} هو 2.63

2. أ) إنجاز عملية القسمة : $425 \div 11 = 32.09230769$

ب) حصر حاصل القسمة $\frac{425}{11}$ إلى الوحدة هو : $32 < \frac{425}{11} < 33$

حصر حاصل القسمة $\frac{425}{11}$ إلى 10^{-2} هو : $32.69 < \frac{425}{11} < 32.70$

ج) المدوّر إلى الوحدة لحاصل القسمة $\frac{425}{11}$ هو 33 والمدوّر إلى 10^{-2} هو 32.69

3. مقلوب العدد 7 هو $\frac{1}{7}$ ، ولدينا : $1 \div 7 = 0.142857142$

ومنه المدوّر إلى 10^{-3} لمقلوب العدد 7 هو : 0.143

4. القيم المقربة الممكنة للعدد a المكتوبة على الشكل العشري باستعمال رقمين على الأكثر بعد الفاصلة هي :

47,60 ، 47,61 ، 47,62 ، 47,63 ، 47,64

47,55 ، 47,56 ، 47,57 ، 47,58 ، 47,59

5. لدينا : $AB + BC = 14$ ، $AB - BC = 4$

الشرط على الطول AC هو : $4 < AC < 14$

6. لدينا $1,253 < l < 1,254$ و $3,175 < L < 3,176$

حصر محيط الدورة P هو : $2(3,175 + 1,253) < P < 2(3,176 + 1,254)$

أي : $8,856 < P < 8,86$

حصر مساحة الدورة هو A : $3,175 + 1,253 < A < (3,176 \times 1,254)$

أي : $3,978 < A < 3,983$

7. أ) حلّ المعادلة $x - 1 = 2x - 8$ هو 7

ب) حلّ المعادلة : $3x - 5 = -2x$ هو 1 ج) حلّ المعادلة $3x - 5 = 1$ هو 2

8. أ) $3x + 8 = 14$ يعني أنّ $3x = 14 - 8$ ومنه $x = \frac{6}{3}$ أي $x = 2$

ب) $3(x - 5) + 2 = 2x$ يعني أنّ $3x - 13 = 2x$ ومنه $3x - 2x = 13$

أي $x = 13$

ج) $x - 1 = x - 2(4 - x)$ يعني أنّ $x - 8 + 2x = x - 1$ ومنه $2x = 7$

أي $x = \frac{7}{2}$

9. من بين المعادلات التي تحقق : معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد حلها العدد 4، وبحيث يكون المجهول موجود في الطرفين هي :

$2x - 3 = x + 1$

الإجابة خطأ. لأنّ إذا ضربنا طرفي متباينة بعدد سالب نعكس اتجاهها

والصواب هو : "إذا كان $7,2 < a < 7,3$ فإنّ $-21,9 < -3a < -21,6$"

إرشادات وتوجيهات

* لاحظ أن الحصر في ب) يعتمد عشريين فرقهما 1 ثم نعتمد عشريين فرقهما 0,01

* في التمرين 4 يسعى أن يكون العدد المؤلف من رقمي أجزاء العشرات وأجزاء المئات محصورا بين 55 و64 وبالتالي فالقيم الممكنة تحقق

$47,55 \leq \ldots \leq 47,64$

$AB - BC < AC$ معناه $AB < AC + BC$

* في التمرين 7 نختبر صحة كل معادلة من أجل إرفاقها بحلها

* آلية مفيدة :

عند نقل حد محصور من طرف مساواة إلى آخر نغيّر إشارته

* في التمرين 9 يمكن كتابة أكثر من معادلة واحدة

20 الحساب الحرفي " المعادلات والمتباينات" (4)

الكفاءات المستهدفة

- حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد (تابع)
- ترجمة مشكلات وحلها بتوظيف المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد.

تمارين

1. حلّ المعادلات الآتية.

أ) $\frac{3x}{5}+2=\frac{1}{2}$ ب) $-\frac{2}{3}(x+6)=-\frac{1}{4}(x$

ج) $(x+1)(x-4)=(x-3)^2$ د) $x(x+5)=(x-2)(x+7)$

2. أوجد ثلاثة أعداد طبيعيّة متتالية مجموعها يساوي 1053.

3. اشترى رياض في المكتبة كراسا بـ 12 DA، و5 أقلام رصاص. واشترت أخته آية كرّاسين، وقلمين من نفس النّوع، ودفعا للبائع نفس المبلغ. ما هو ثمن القلم ؟

4. لتشجيع رياض على المحاولة في تمارين الرّياضيّات، اقترح عليه والده ما يأتي : إذا كان الحلّ صحيحا يعطيه 100 DA ، أما إذا كان خاطئا يعطيه 2 DA مقابل المحاولة. حاول رياض في 20 تمرينا فنال 168 DA. لمعرفة عدد التمارين التي حلّها رياض حلاّ صحيحا : أولا : ترجم هذه المسألة إلى معادلة.

ثانيا : حلّ المعادلة التي وجدتها

5. لتنظيم الملفّات، والتحكم في تسييرها بسرعة، يُقسّم القرص الصلب في جهاز الكمبيوتر إلى عدد من الأجزاء متناسب مع سعته

قرص صلب سعته 40 GO (GO : جيغا أوكتي). قُسّم إلى ثلاثة أجزاء :

C و D و E، حيث سعة D تزيد عن سعة C بـ 4 GO، وسعة E ضعف سعة D

ما هي سعة كلّ جزء ؟

6. فقدت سيارة $\frac{1}{8}$ ثمنها (ثُمْن) قيمتها في سنة استعمالها الأولى. كما فقدت $\frac{1}{5}$ ثُمْن قيمتها في السّنة الثانية، فإذا علمت أنّ سعرها أصبح 980000 DA فكم كان ثمن شراء هذه السّيارة ؟

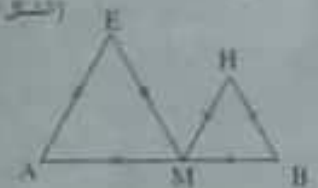
7. $[AB]$ قطعة مستقيم طولها 10.5 cm، نريد أنْ ننشئ عليها

أ) في الشكل الأول مربعا $MBCF$ ومثلثا AMD متقايس الأضلاع لهما نفس المحيط.

ب) في الشكل الثاني مثلثين AME و MBH كلّ منهما متقايس الأضلاع ومحيط AME ضعف محيط MBH

حدّد في كلّ من الشكلين موقع النّقطة M

(الشكل الأول)



(الشكل الثاني)

حلول التمارين

1 أ) لدينا $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{3x}{5}$ بضرب طرفي المعادلة في 10 نجد $5x + 20 = 6x$ ومنه $x = 20$

ب) لدينا $\frac{5}{4}(x + 6) = \frac{1}{3}x + 1$ بضرب طرفي المعادلة في 12 نجد $15x + 90 = 4x + 12$

ومنه $11x = -78$ أي $x = -\frac{78}{11}$ إذن $x = -6,9$

وبالتالي حل المعادلة $\frac{5}{4}(x + 6) = \frac{1}{3}x + 1$ هو $-6,9$

ج) $(x - 4)(x + 1) = (x - 3)^2$ تعني أن $x^2 - 3x - 4 = x^2 - 6x + 9$

وهنه $3x = 13$ إذن $x = \frac{13}{3}$ وبالتالي فإن حل المعادلة هو $\frac{13}{3}$

د) $(x + 5)(x + 7) = (x - 2)(x + 7)$ بعد النشر والتبسيط نجد $14 = 0$.

ومنه ليس للمعادلة $(x + 7)(x - 2) = (x + 5)(x + 7)$ حلّ

2. نفرض أنّ الأعداد هي n و $n + 1$ و $n + 2$ فيكون:

$n + (n + 1) + (n + 2) = 1053$ أي $3n + 3 = 1053$ إذن $n = \frac{1053 - 3}{3} = 350$

وبالتالي الأعداد هي: 350، 351، 352 (التحقق: $350 + 351 + 352 = 1053$)

3. ثمن الرّصاص نسمّه مجهول نفرض أنّه x، فيكون:

المبلغ الذي دفعه رياض هو $(12x + 5)$، والمبلغ الذي دفعته أخته هو $(24 + 2x)$

وبما أنهما دفعا للبائع المبلغ نفسه فإنّ: $12x + 5 = 24 + 2x$

وبحل المعادلة نجده $x = 1$ وبالتالي فإنّ ثمن القلم هو 1DA.

4. عدد التّمارين التي حلّها رياض حلاً صحيحا مجهولا نفرض أنه x، فيكون:

عدد التّمارين التي حلّها حلاً خاطئا هو $(20 - x)$ (لأنه حاول في 20 تمرينا) ومادام أنه نال 108 DA مقابل 20 محاولة فإنّ $10x + 2(20 - x) = 168$

ومنه $8x = 128$ إذن $x = 16$

عدد التّمارين التي حلّها رياض حلاً صحيحا هو 16

5. نفرض أنّ سعة الجزء C هي x

فتكون سعة الجزء D هي $(4 + x)$ وسعة الجزء E هي $2(x + 4)$

ومنه $x + (x + 4) + 2(x + 4) = 40$ أي $4x = 28$ وبالتالي $x = 7$

أي أنّ سعة الجزء C هي $7\ Go$ وسعة D هي $11\ Go$ وسعة E هي $22\ Go$

6. نفرض أنّ ثمن شراء السيارة هو x

بعد سنة من استعمالها فقدت $\frac{1}{8}$ فأصبح سعرها يساوي $x - \frac{1}{8}x$

وبعد السنة الثانية فقدت $\frac{1}{8}$ $(x - \frac{1}{8}x)$ فيصبح سعرها يساوي $(x - \frac{1}{8}x) - \frac{1}{8}(x - \frac{1}{8}x)$

ومنه $(x - \frac{1}{8}x) - \frac{1}{8}(x - \frac{1}{8}x) = 980\,000$ أي أنّ $x = 1\,280\,000DA$

7. نفرض أنّ $AM = x$ ومنه $MB = 10,5 - x$

أ) في الشكل الأول لدينا $3x = 4(10,5 - x)$ ومعناه $7x = 42$ ومنه $x = 6$

النّقطة M في الشكل الأول هي بحيث $AM = 6\ cm$ و $BM = 4,5\ cm$

ب) في الشكل الثاني لدينا $x = 2[3(10,5 - x)]$ ومنه $9x = 63$ أي $x = 7$

النّقطة M في الشكل الثاني هي بحيث $AM = 7\ cm$ و $BM = 3,5\ cm$

إرشادات وتوجيهات

• نقسّم مقربة جدا : نضرب طرفي المعادلة بمضاعف مشترك للأعداد الموجودة في المقام للتخلص منها وتبسيط المعادلة

• المعادلة $0 \times x = b$ ($b \neq 0$) ليس لها حل.

• للمعادلة $0 \times x = 0$ عدد غير منته من الحلول

• العدد الطبيعي $(n + 1)$ يلي العدد الطبيعي n

• لحلّ مسألة ذات مجهول بمعادلة:
– نختار رمزا للمجهول
– نترجم معطيات المسألة إلى معادلة
– نحلّ هذه المعادلة
– نجيب عن السؤال المطروح

• يمكن التحقق بحساب ما يلي:
$5 \times 4 + 12 = 2 \times 4 + 24$

• في التمرين 5 يمكن التحقق بملاحظة أنّ:
$(7 + 11 + 22 = 40)$

• في التمرين 6 يمكن حلّ المعادلة كالآتي:
نضرب طرفيها بالعدد 8 فنجد:
$8x - x - x + \frac{x}{8} = 8 \times 980000$
نبسط ثمّ نضرب طرفيها بالعدد 8 فنجد:
$8x - 8x + x = 8 \times 8 \times 980000$
$49x = 8 \times 8 \times 980000$
$x = \frac{8 \times 8 \times 980000}{49}$
$x = 1\,280\,000$

الإجابة صحيح

21 التناسبية (التمثيل البياني)

الكفاءات المستهدفة

- تمثيل وضعية تناسبية بيانيا.
- التعرف على وضعية تناسبية في تمثيل بياني.

مكتسبات

- التعرف على وضعية تناسبية.
- التمثيل في مستو مزوّد بمعلم.

ما يلزمك معرفته

1 المقداران المتناسبان ومعامل التناسب

المقداران المتناسبان هما مقداران قيمة أحدهما تنتج بضرب القيمة الموافقة للآخر بعدد ثابت، ويسمى هذا العدد معامل التناسب.

مثال 1 :
الجدول الآتي يمثل سعر البطاطا بالنسبة إلى وزنها.

الوزن (kg)	1	2	5	7,5
السعر (DA)	16	32	80	120

وزن البطاطا وسعرها مقداران متناسبان ومعامل التناسبية هو 16.
إذا رمزنا لوزن البطاطا بـ x
ولسعرها بـ y، نكتب $y = 16x$

2 التمثيل البياني لوضعية تناسبية

تُمثل الوضعية التناسبية بيانيا بنقط من مستقيم يشمل مبدأ المعلم.

مثال 2 : تمثيل الوضعية الواردة في المثال 1.

لاحظ أنّ النقط الأربع تنتمي إلى نفس المستقيم الذي يشمل مبدأ المعلم.

إجراءات وتقنيات

- إذا كانت النقط الممثلة لجدول معطيات ليست في استقامية، أو من مستقيم لا يشمل المبدأ، فإنّ الجدول هو لوضعية لاتناسبية.

تمارين

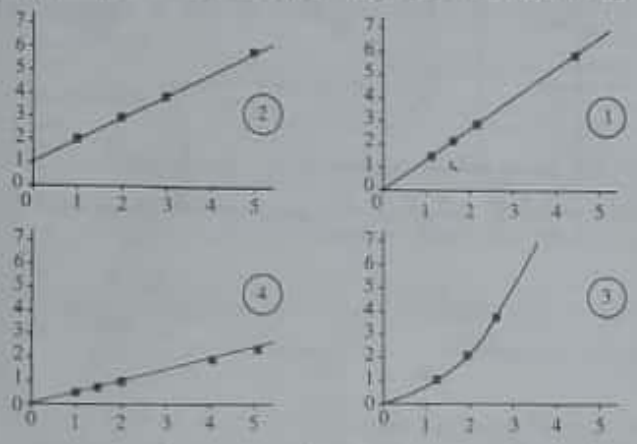
1. أ) أكمل الجدول الآتي.

طول ضلع مربع بـ cm	2	...	...	a
مساحته بـ cm^2	...	...	100	...
محيطه بـ cm	...	24	...	...

ب) استنتج المقدارين المتناسبين : مساحة المربع وطول ضلعه، أم محيط المربّع وطول ضلعه.

2. إذا علمت أنّ 25 kg من الطماطم ثمنها 425 DA، وأنّ سعر الطاطم y متناسب مع وزنها x.
أ) عبّر عن السعر y بدلالة الوزن x.
ب) ما وزن كمية الطماطم التي ثمنها 85 DA ؟

3. أي التمثيلات البيانية الآتية هو تمثيل لوضعية تناسبية ؟ برر جوابك.



4. مثل بيانيا كلا من معطيات الجدولين الآتيين، وبين أيهما يمثل وضعية تناسبية :

المسافة المقطوعة بـ km	100	200	250	300
كمية البنزين المستهلكة بـ l	8,2	16,4	20,5	24,3

عمر فريد (بالسنوات)	1	6	15	21
وزنه بـ kg	7,5	27	42	63

5. الجدول الآتي يمثل المسافة اللازمة لتوقف سيارة بدلالة سرعتها عند بدإ الفرملة :

السرعة بـ km	40	60	80	110	130
المسافة بـ m	20	40	65	110	149

أ) مثل بيانيا هذه الوضعية (المسافة اللازمة لتوقف سيارة بدلالة سرعتها)
ب) هل المسافة اللازمة لتوقف سيارة وسرعتها عند بدإ الفرملة مقداران متناسبان ؟ برر جوابك.

صحيح أم خطأ ؟ طول الدائرة متناسب مع نصف قطرها

حلول التمارين

1. 1) إكمال الجدول :

طول ضلع مربع بـ cm	2	6	10	a
مساحته بـ cm^2	4	36	100	a^2
محيطه بـ cm	8	24	40	$4a$

ب) المقداران المتناسبان هما :محيط المربع وطول ضلعه.

2. 1) التعبير عن سعر الطماطم y بدلالة وزنها x :

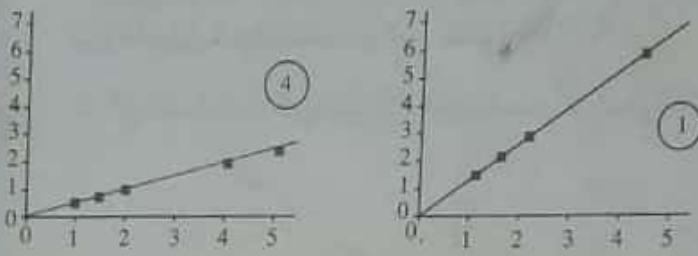
بما أنّ السعر متناسب مع الوزن فإنّ $\frac{y}{x} = \frac{425}{25} = 17$ ومنه $y = 17x$

ب) حساب وزن كمية الطماطم التي ثمنها : 85 DA

نعوض y بالعدد 85 في المعادلة $y = 17x$ ، فنجد.

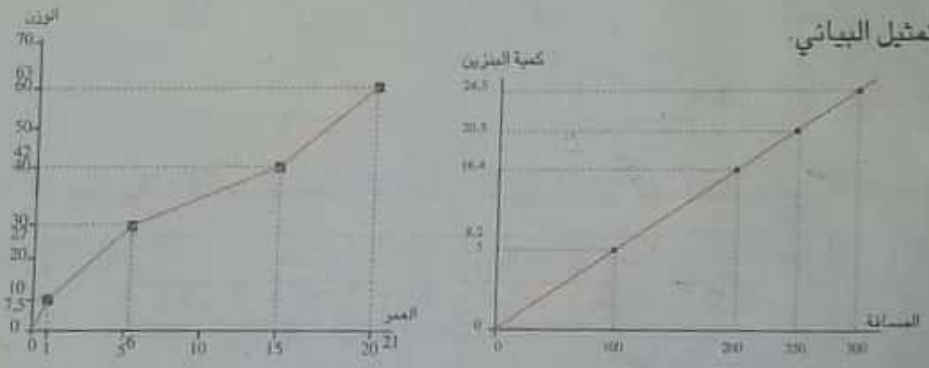
ومنه $x = \frac{85}{17} = 5$ وبالتالي فالوزن هو 5 kg.

3. كلّ من التمثيلين ① و ④ هو تمثيل لوضعيّة تناسبيّة.



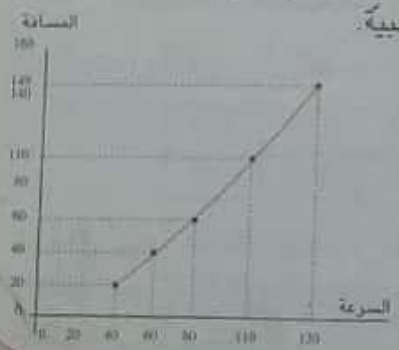
لأنّ في كلّ من ① و ④ الوضعية ممثلة بيانيا بنقط من مستقيم يشمل مبدأ المعلم. بينما في التمثيل البيانيا ③ النّقط ليست مستقيمة، وفي التمثيل البياني ② النّقط من مستقيم ولكنّه لا يشمل المبدأ.

4. التمثيل البياني.



جدول كمية البنزين المستهلكة بدلالة المسافات المقطوعة هو الذي يمثل وضعية تناسبيّة، بينما جدول وزن فريد بدلالة عمره لا يمثل وضعية تناسبيّة.

5. 1) التمثيل البياني لمعطيات الجدول.



ب) المسافة اللازمة لتوقف سيارة وسرعتها عند بدإ الفرملة مقداران غير متناسبين. لأنّ في التمثيل البياني لمعطيات الجدول النّقط ليست في استقامية.

الإجابة صحيح .إذا كان r نصف قطر دائرة فإنّ طولها P يساوي $P = 2\pi r$

إرشادات وتوجيهات

- محيط المربّع P بدلالة طول ضلعه a يساوي : $P = 4a$
- مساحة المربّع وطول ضلعه مقداران غير متناسبين.
- يمكن حساب وزن كمية الطماطم التي سعرها 85DA بإكمال جدول التناسبيّة الآتي:

الوزن	425	...
السعر	17	85

- تذكّر أنّه : إذا كانت النّقط الممثلة لجدول معطيات ليست في استقامية، أو من مستقيم لا يشمل المبدأ، فإنّ الجدول هو لوضعية لاتناسبية.
- في التمرين 5 الجزء (ب) يمكن التحقق من أنّ المقادير غير متناسبين بالتأكد من أنّ:

$$\frac{40}{20} \neq \frac{80}{60} \neq \frac{110}{110} \neq \frac{130}{149}$$

22 التناسبية (الحركة المنتظمة)

الكفاءات المستهدفة

- التعرف على الحركة المنتظمة.
- توظيف التناسبية لاستعمال وحدات الزمن.
- استعمال المساواة $d = v \times t$ في حسابات متعلقة بالمسافة المقطوعة والسرعة والزمن.

مكتسبات

- تمثيل وضعيّة تناسبيّة بيانياً.

ما يلزمك معرفته

1. الحركة المنتظمة

نقول عن متحرّك أنّ حركته منتظمة إذا كان يقطع مسافات متساوية خلال مدد زمنية متساوية.

مثال 1:

الزمن (h)	0,5	1	1,5	2
المسافة (km)	40	80	120	160

الجدول أعلاه هو لحركة منتظمة، لأنّ المتحرك يقطع 40km كل نصف ساعة، وهو جدول تناسبيّة.

2. السرعة المتوسطة

السرعة المتوسطة v لمتحرك يقطع مسافة d خلال مدة زمنية t تساوي حاصل قسمة المسافة المقطوعة d على الزمن المستغرق t.

أي: $\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{المدة الزمنية}}$

ونكتب: $v = \frac{d}{t}$

إنّ $v = \frac{d}{t}$ تعني: $d = vt$

كما تعني $t = \frac{d}{v}$

مثال 2:

في المثال لدينا 1:

$\frac{40}{0,5} = \frac{80}{1} = \frac{120}{1,5} = \frac{130}{149} = 80$

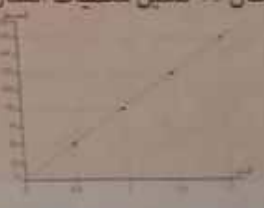
ومنه السرعة تساوي $v = 80km/h$

وتساوي معامل التناسبيّة.

3. التمثيل البياني لحركة منتظمة

تُمثل الحركة المنتظمة بنقط من مستقيم يشمل مبدأ المعلم.

مثال 3: تمثيل معطيات المثال 1



تمارين

1. الجدول المرفق يمثل المسافات المقطوعة بدلالة الزمن لجسم يسقط من ارتفاع قدره 31,25 m.

الزمن (s)	0,5	1	1,5	2	2,5
المسافة (m)	1,25	5	11,25	20	31,25

أ) هل حركة هذا الجسم منتظمة ؟ برّر جوابك.
ب) هل المسافة المقطوعة متناسبة مع الزمن المستغرق ؟ برّر جوابك.
ج) مثل بيانياً معطيات الجدول. وتحقق من أجوبة السؤالين أعلاه.

2. باعتبار أنّ الحركة في التمرين السابق تمت على خمس مراحل محدّدة بالأزمنة المعطاة.
أ) انقل الجدول الآتي وأكمله.

المرحلة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة
المسافة المقطوعة					
مدة المرحلة					
سرعة كل المرحلة					

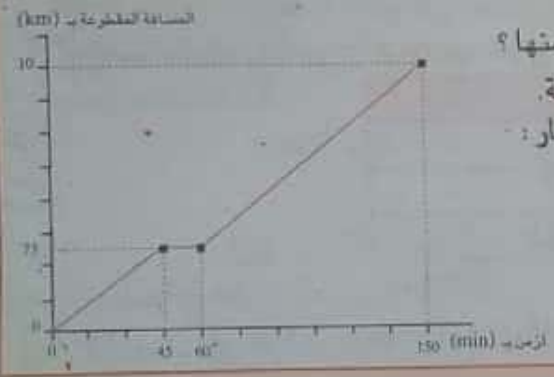
ب) احسب السرعة المتوسطة لسقوط هذا الجسم بطريقتين مختلفتين.

3. يقطع قطار مسافة 378 km خلال 3 h 30 min.
احسب سرعته المتوسطة.

4. يسير سائق سيارة بسرعة متوسطة تساوي 80 km/h.
احسب المسافة التي يقطعها خلال 2 h، ثم خلال 2 h 45min.

5. خرج رياض من منزله على الساعة 6 h 25 min جريا بسرعة متوسطة تساوي 10 km/h في اتجاه محطة القطار التي تبعد مسافة 2,5 km عن المنزل.
إذا علمت أنّ القطار ينطلق على الساعة 7 h 45 min فهل يلحق به رياض ؟

6. التمثيل البياني المرفق يمثل المسافة المقطوعة من قبل سائق سيارة بدلالة الزمن.



أ) ما عدد مراحل هذه الحركة؟ ما مدة كلّ منها ؟
ب) احسب السرعة المتوسطة في كل مرحلة.
ج) احسب السرعة المتوسطة على كل المسار :
1. بأخذ زمن التوقف في الحسبان.
2. دون حساب زمن التوقف.

صحيح أم خطأ ؟
المسافة المقطوعة [illegible] حاصل السرعة المتوسطة في المدة الزمنية المستغرقة.

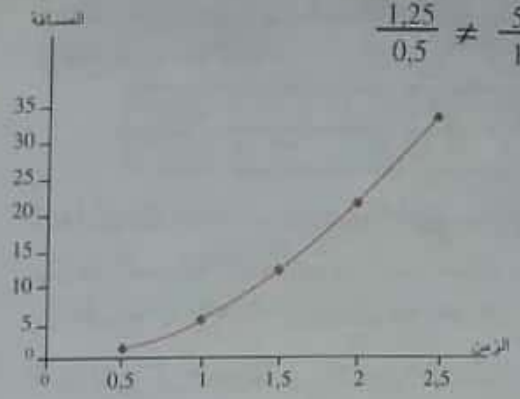
حلول التمارين

1 1) حركة هذا الجسم ليست منتظمة. لأنّ المتحرّك لم يقطع مسافات متساوية خلال مدد زمنيّة متساوية. لاحظ مثلا أنّه قطع في النّصف ساعة الأول 1,25 m ، بينما قطع في النّصف ساعة الثاني 3,75 m.

ب) المسافة المقطوعة غير متناسبة مع الزمن المستغرق.

لأنّ: $\frac{1,25}{0,5} \neq \frac{5}{1} \neq \frac{11,25}{2} \neq \frac{20}{2} \neq \frac{20}{2} \neq \frac{31,25}{2,5}$

ج) التمثيل البيانيّ لمعطيات الجدول:



تلاحظ من التّمثيل البيانيّ أنّ النقط ليست في استقاميّة، وبالتالي فإنّ:

1) المسافة المقطوعة غير متناسبة مع الزّمن المستغرق.

2) حركة هذا الجسم ليست منتظمة.

2 1) إكمال الجدول.

المرحلة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة
المسافة المقطوعة	1,25	3,75	6,25	8,75	11,25
مدّة المرحلة	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
سرعة كل المرحلة	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5

ب) حساب السّرعة المتوسّطة لسقوط هذا الجسم.

طريقة 1: لدينا المسافة المقطوعة $d = 31,25m$، والمدّة $t = 2,5\ s$ بالتّالي السّرعة المتوسّطة تساوي $v = \frac{31,25}{2,5}$، ومنه $v = 12,5\ m/s$

طريقة 2: نحسب متوسّط سرعات كلّ المراحل الخمس، فنجد:

$$\frac{2,5 + 7,5 + 12,5 + 17,5 + 22,5}{5} = 12,5$$

3 لدينا $3\ h\ 30\ min = 3,5\ h$، و $\frac{378}{3,5} = 108$

وبالتّالي فالسّرعة المتوسّطة للقطار تساوي 108 km/h

4 لدينا $80 \times 2 = 160$، ومنه فالمسافة المقطوعة خلال 2h تساوي 160 km.

لدينا $2\ h\ 45\ min = 2,75h$، و $80 \times 2,75 = 220$، ومنه فالمسافة المقطوعة خلال 2 h 45 min تساوي 220 km.

5 نحسب الزمن الذي يستغرقه رياض ليصل إلى المحطة.

لدينا $\frac{2,5}{10} = 0,25$ ومنه الزمن المستغرق يساوي $0,25\ h = 15\ min$

ولدينا $6\ h25\ min + 15\ min = 6\ h\ 40\ min$، بالتّالي فإنّ رياض يصل إلى المحطة على السّاعة 6 h 40 min أي قبل انطلاق القطار بـ 5 min.

6 1) تمّت هذه الحركة على ثلاث مراحل، الأولى دامت 45 min، والثّالثة 1, 5 h، وتوقف السّائق بينهما مدّة 15 min.

المرحلة	الثالثة	الرابعة	الخامسة
المسافة المقطوعة (km)	75	0	135
مدّة المرحلة (h)	0,75	0,25	1,5
سرعة كل المرحلة (k/mh)	100	0	90

1) المسافة المقطوعة تساوي 210 km.

1) الزّمن يساوي $150\ min = 2,5\ h$، و $\frac{210}{2,5} = 48$ والسّرعة تساوي 84 km/h

2) الزّمن يساوي $135\ min = 2,25h$، و $\frac{210}{2,25} \approx 93,33$، والسّرعة تساوي 93,33km/h

الإجابة صحيح.

إرشادات وتوجيهات

- المسافة المقطوعة خلال النصف السّاعة الثّاني تساوي 5-1,25=3,75 وبنفس الطّريقة يمكن حساب المسافات الأخرى.
- تكون حركة الجسم منتظمة إذا كان التّمثيل البيانيّ للمسافة المقطوعة بدلالة الزّمن المستغرق بنقط من مستقيم يشمل مبدأ المعلم.
- متوسّط السّرعات الخمس يساوي حاصل قسمة مجموع السّرعات على عددها.
- السّرعة المتوسّطة تساوي حاصل قسمة المسافة المقطوعة على الزّمن المستغرق.
- المسافة المقطوعة تساوي جداء السّرعة والزّمن المستغرق.
- الزّمن المستغرق يساوي حاصل قسمة المسافة المقطوعة على السرعة.
- في التمرين 6
المسافة المقطوعة في المرحلة الثّانية تحسب من 75−210 :
وتساوي 135 km
الزمن المستغرق في المرحلة الثّانية يحسب من 60−150 :
وتساوي $90\ min = 1,5\ h$

23 التناسبيّة

الكفاءات المستهدفة
- تحويل وحدات قياس السرعة.
- استعمال التناسبية في وضعيات تدخل فيها النسبة المئوية.

مكتسبات
- استعمال جدول تناسبيّة.
- تحويل وحدات القياس.

ما يلزمك معرفته

1) حساب نسبة مئوية

لحساب نسبة مئويّة عدد x بالنسبة إلى عدد y نبحث عن الرابع المتناسب الناقص في جدول التناسبيّة الآتي:

y	100
x	?

مثال 1 :
النسبة المئويّة P لـ 12 من 32:

32	100
12	P

ومنه $P = \frac{12 \times 100}{32} = 37,5$ أي 37,5%

2) تطبيق نسبة مئوية

لحساب $\frac{P}{100}$ من عدد x نضرب هذا العدد بـ $\frac{P}{100}$ أي نبحث عن الرابع المتناسب الناقص في جدول التناسبيّة الآتي:

x	100
?	P

مثال 2 : لحساب 20% من العدد 145 نكمل جدول التناسبيّة الآتي:

145	100
?	20

ومنه $145 \times \frac{20}{100} = 29$

إجراءات وتقنيات

تحويل وحدات قياس السرعة

يتنقل دراج بسرعة 45 km في الساعة (45 km/h)، احسب سرعته بـ : (m/s)
- نحوّل وحدات الطول: $45\ km = 45000$
- نحوّل وحدات الزمن: $1h = 3600$
- نحسب السرعة: $\frac{45000}{3600} = 12,5$

ومنه $45\ km/h = 12,5\ m/s$

تمارين

1. يدور القمر حول الأرض على بعد 381547 km بسرعة متوسّطة تساوي 3 700 km/h على مسار بيضويّ طوله 2 426 164 km.
احسب مدّة دورة القمر حول الأرض مقدّرة بالأيّام والساعات والدّقائق والثواني.

2. أيهما أسرع : فهد يركض بسرعة 30 m/s، أم سائق دراجة يسير بسرعة 35 km/h ؟

3. حوّل إلى m/s كلاّ ممّا يأتي.
أ) 23 m/min. ب) 0,4 km/s. ج) 95 km/h

4. حوّل إلى km/h كلاّ ممّا يأتي.
أ) 7 km/min. ب) 9500 m/h ج) 11 m/s.

5. كان عدد سكّان إحدى القرى يساوي 1200 نسمة في سنة 2005. إذا علمت أنّ نسبة النّمو السكاني في هذه القرية يساوي 20% سنويا، فكم سيصبح عدد سكّانها في سنة 2006 ؟

6. أصاب حريق غابة مساحتها 3500 هكتارا، فاحترق 6% منها. احسب مساحة الغابة الّتي لم يمسّها الحريق.

7. ازداد ثمن تذكرة دخول ملعب كرة القدم بنسبة 20% ، فأصبح سعرها 72 DA. كم كان ثمنها قبل الزيادة ؟

8. بيّن أنّه : عندما يزداد عدد a بنسبة P%، يصبح يساوي $a\left(1+\frac{P}{100}\right)$

9. بيّن أنّه : عندما ينقص عدد a بنسبة P%، يصبح يساوي $a\left(1-\frac{P}{100}\right)$

10. مستطيل طوله 30 cm وعرضه 18 cm.
أ) يزداد طوله بـ 10%، وينقص عرضه بـ 10%. هل يزداد محيطه أم ينقص ؟ وبأية نسبة ؟
ب) نفس الأسئلة إذا نقص طوله بـ 10% ، وازداد عرضه بـ 10%.

11. عبّر بنسبة مئويّة عن 25% من 10% لعدد x (أي رُبُع عُشْرِ العدد x).

صحيح أم خطأ ؟ إذا كان كلّ طفلين (2) يأكلان 5 علب شوكلاطة في 4 أيام، فإنّ 8 أطفال يأكلون 50 علبة شوكلاطة في 10 أيام

حول التمارين

1. مدّة دورة القمر حول الأرض مقدّرة بالأيام والساعات والدقائق.
لدينا $\frac{2426164}{3700} = 655{,}72$ ومنه مدّة الدّورة $t = 655{,}72\ \text{h}$
$655{,}72\ \text{h} = 27\ \text{j}\ 7\ \text{h}\ 43\text{min}\ 12\text{s}$

2. تحويل سرعة سائق الدرّاجة: $35\ km/h = \frac{35\times 1000\ m}{3600\ s} = 9{,}72\ m/s$
ومنه فإنّ الفهد أسرع من سائق الدرّاجة هذا بأكثر من ثلاث مرّات.

3. أ) $23\ \text{m/min} = \frac{23\ \text{m}}{60} = 0{,}38\ m/s$
ب) $0{,}4\ \text{km/s} = \frac{0{,}4\times 1000\ \text{m}}{1\ s} = 400\ m/s$.
ج) $95\ \text{km/h} = \frac{9500\times 1000\ \text{m}}{3600\ s} = 26{,}39\ m/s$

4. أ) $7\ \text{km/min} = \frac{7\ \text{km}}{\frac{1}{60}\ h} = 7\times 60 = 420\ km/h$.
ب) $9500\ \text{m/h} = \frac{95 \div 1000\text{km}}{1\text{h}} = 9{,}5\ km/h$
ج) $11\text{m/s} = \frac{11 \div 1000\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\ h} = \frac{11}{1000}\times 3600\ \text{km/h} = 39{,}6\ km/h$

5. 20% من 1200 يقابلها $\frac{20}{100}\times 1200 = 240$، ولدينا $1200 + 240 = 1440$.
وبالتّالي في سنة 2006 يصبح عدد سكّان هذه القرية 1440 نسمة.

6. 6% من 3500 يقابلها $\frac{20}{100}\times 3500 = 210$. ولدينا $3500 - 210 = 3290$
وبالتّالي فإنّ مساحة الغابة التي لم يمسّها الحريق تساوي 3290 هكتارا.

7. ثمن التّذكرة قبل الزّيادة مجهول، نفرضه x، و 20% من x يقابلها $\frac{20}{100}\ x = 0{,}2x$
ومنه $x + 0{,}2x = 72$ معناه $1{,}2x = 72$. وبالتالي $x = 60$.
كان ثمن التّذكرة قبل الزّيادة 60 DA.

8. نسبة P% من عدد a يقابلها $a\times\frac{P}{100}$، وبعد الزّيادة يصبح العدد بساوي:
$a + a\ \frac{P}{100} = a\left(1 + \frac{P}{100}\right)$

9. نسبة P% من عدد a يقابلها $a\times\frac{P}{100}$، وبعد النقصان يصبح العدد بساوي:
$a - a\ \frac{P}{100} = a\left(1 - \frac{P}{100}\right)$

	قبل أي تغيير	في الحالة أ)	في الحالة ب)
الطول cm	30	33	27
العرض cm	18	16,2	19,8
المحيط cm	96	98,4	93,6
		زيادة 2,4 cm	نقصان 2,4

10. 10% من 30 cm يقابلها 3 cm،
و 10 % من 18 cm يقابلها 1,8 cm.
نسبة الزّيادة تساوي نسبة النّقصان،
وتساوي 2,5 %.

11. 10 % العدد x تكتب $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ و 25% من $\frac{1}{10}$ تكتب $\frac{25\times\frac{1}{10}}{100} = \frac{2{,}5}{100}$
ومنه 25% من 10% لعدد x تساوي 2,5% من هذا العدد.

إرشادات وتوجيهات

- 381 547 km هو البعد بالتّقريب لمسار القمر عن الأرض، وهي معطاة زائدة في التّمرين.
- لتحويل 655,72 h إلى أيّام وساعات ودقائق:

– نقسم 655,72 h على 24 h فنجد 27 يوما والباقي 7,72 h.
– نحتفظ بـ 7h، ونضرب 0,72 h في 60 فنجد 43,2 min.
– نحتفظ بـ 43 min ، ونضرب 0,2 min في 60 فنجد 12 s.

في التّمرين 2 للمقارنة نعبّر السرعتين بنفس الوحدة.
- $1\ \text{min} = \frac{1}{60}\ h$
- في التمرين 4 يمكن استعمال الرّابع المتناسب، أو إكمال جداول تناسبيّة مثل:

المسافة	7 km	...
الزّمن	1 min	60 min

- لتحويل 11 m/s :

– نحوّل $11\ \text{m} = \frac{11}{1000}\ \text{km}$
– نحوّل $1\ s = \frac{1}{3600}\ \text{h}$
– ثمّ نقسم $\frac{11}{1000} \div \frac{1}{3600} = \frac{11}{1000}\times 3600 = 39{,}6$
فنجد $11\ \text{m/s} = 39{,}6\ \text{km/h}$

- في التمرين 10 يمكن حساب نسبة الزيادة أو النّقصان بإكمال جدول التناسبيّة الآتي:

96	100
2,4	...

الإجابة صحيح. لأنّ 8 أطفال يأكلون 20 علبة شوكلاطة في 4 أيام، وبالتالي ففي 10 أيام يأكلون 50 علبة شوكلاطة.

24 تنظيم المعطيات (1)

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التعبير: مجتمع، ميزة(طبع)، تكرار...
- تجميع معطيات إحصائية في فئات وتنظيمها في جدول.

مكتسبات

- قراءة معطيات إحصائية وتفسيرها
- تنظيم معطيات في جداول.

ما يلزمك معرفته

1) المجتمع الإحصائي

هو مجموعة العناصر التي تتمّ عليها دراسة إحصائيّة.

ملاحظة: المجتمع في دراسة إحصائيّة ليس بالضرورة مكوّنا من أحياء.

2) الميزة (أو الطّبع)

هي الظاهرة المدروسة إحصائيا، وعندما نعبّر عن قيمها بأعداد (نسمّيها ميزة كميّة).

3) المجال والفئة

أ) المجال $[a;b[$ حيث $a < b$ هو مجموعة الأعداد x المحققة لـ $a \leq x < b$.

مثال: العدد n من المجال $[0;9[$ معناه أنّ $0 \leq n < 9$.

ب) الفئة يمكن تنظيم قيم الميزة (الطّبع) في دراسة إحصائيّة ضمن مجالات من الشكل $[a;b[$ ويُسمى كلّ مجال فئة.

مدى الفئة $[a;b[$ هو طول مجالها

ويساوي $b - a$.

مركز الفئة $[a;b[$ هو العدد $\frac{a+b}{2}$

ملاحظتان:

1- نلجأ إلى تنظيم قيم ميزة (طبع) في فئات إذا كان عددها كبيراً نسبيّا أو مستمراً.

2- عادة ما نستعمل فئات متساوية المدى أي: مجالات لها نفس الطّول.

تمارين

1. أجرينا استجوابا في متوسّطة عدد تلاميذها 450 حول متابعة الحصص المتلفزة، فوجدنا أنّ: نصف $(\frac{1}{2})$ عدد التلاميذ المستجوبين يفضّلون متابعة الرّسوم المتحركة، وثلثهم $(\frac{1}{3})$ يفضّلون متابعة الرّياضة، وسدسهم $(\frac{1}{6})$ يفضل متابعة الأشرطة الوثائقيّة.

فإذا علمت أنّ عدد التّلاميذ الذين شاركوا في هذا الاستجواب هو 390.

أ) ما هو المجتمع الإحصائيّ محلّ هذه الدّراسة؟ كم عدد أفراده؟

ب) ما هي الميزة (الطّبع) المدروسة؟

ج) احسب تكرار كلّ قيمة من قيم الميزة المدروسة؟

2. تمثّل سلسلة الأعداد أدناه أعمار تلاميذ قسم (3 م1) بإكماليّة النّجباء:

11، 12، 12، 11، 12، 15، 13، 12، 12، 12،
12، 12، 11، 11، 13، 11، 11، 15، 11، 11،
15، 12، 13، 13، 12، 16، 12، 13، 13، 15،
13، 12، 14، 14، 12، 13.

أ) ما هو المجتمع الإحصائيّ محلّ هذه الدّراسة؟ كم عدد أفراده؟

ب) ما هي الميزة (الطّبع) المدروسة؟

ج) ما هو تكرار القيمة 12؟

د) ما هو تكرار الفئة $[13;15[$؟

3. أ) نظّم في جدول – باستعمال كلّ القيم – معطيات السّلسلة الواردة في التمرين السابق.

ب) نظّم في جدول – باستعمال فئات متساوية المدى طول كلّ منها يساوي 2 – معطيات السّلسلة الواردة في التّمرين السّابق.

4. اشترى تاجر 30 خروفا أوزانها بالكيلوغرام معطاة أدناه، وصنّفها إلى فئات متساوية المدى طول كلّ منها 5 kg:

الأوزان

12، 12، 22، 24، 15، 17، 20، 28، 16، 26،
25، 21، 19، 20، 30، 23، 23، 18، 17، 15،
15، 16، 18، 20، 22، 23، 23، 29، 17.

أ) ما هو عدد الفئات.

ب) عيّن مركز كلّ فئة، والتكرار الموافق لها.

ج) مثّل النّتائج التي تحصلت عليها في جدول.

5. بمستشفى الولادة وجدت أميرة في مكتب القابلة الجدول الآتي مسبوقا بالعبارة: توزيع ولادات الأطفال تبعا لأعمار الأمّهات خلال سنة 2004:

العمر	[15;20[	[20;25[	[25;30[	[30;35[	[35;40[	[40;45[
عدد الولادات	145	498	709	1653	1023	563

ساعد أميرة على معرفة:

أ) المجتمع محلّ الدّراسة

ب) الميزة المدروسة.

ج) هل الفئات متساوية المدى؟

د) ما هو العدد الإجماليّ للولادات بهذا المستشفى خلال سنة 2004؟

صحيح أم خطأ؟

مدى الفئة هو عدد موجب غير معدوم.

حلول التمارين

1. 1) المجتمع الإحصائيّ محلّ هذه الدّراسة هو تلاميذ متوسّطة، عدد أفراده 450.
ب) هي الميزة (الطّبع) المدروسة هي متابعة الحصص المتلفزة.
ج) حساب تكرار كلّ قيمة من قيم الميزة المدروسة

الأشرطة الوثائقية	الرياضة	الرسوم المتحركة	الحصة المتابعة
65	130	195	التكرار

2. 1) المجتمع الإحصائيّ محلّ هذه الدّراسة هو تلاميذ قسم (3 م ا) بإكماليّة النجباء، عدد أفراده 36.
ب) الميزة (الطّبع) المدروسة هي أعمار التّلاميذ.
ج) تكرار القيمة 12 هو 13.
د) تكرار الفئة $[13;15[$ هو 9

3. 1)

العمر (السنة)	11	12	13	14	15	16
التكرار	8	13	7	2	5	1

ب)

الفئة	$[11;13[$	$[13;15[$	$[15;17[$
التكرار	21	9	6

4. 1) لدينا $18 = 12 - 30$ ؛ و$3,6 = 5 \div 18$، وبالتّالي عدد الفئات هو 4.
ب) مركز الفئة $[12;17[$ هو 14.5، والتكرار الموافق لها هو 7.
مركز الفئة $[17;22[$ هو 19.5، والتكرار الموافق لها هو 11.
مركز الفئة $[22;27[$ هو 24.5، والتكرار الموافق لها هو 9.
مركز الفئة $[27;32[$ هو 29.5، والتكرار الموافق لها هو 3.
ج) تمثّل النّتائج المتحصّل عليها في جدول

الفئة	$[12;17[$	$[17;22[$	$[22;27[$	$[27;32[$
مركز الفئة	14,5	19,5	24,5	29,5
التكرار	7	11	9	3

5. 1) المجتمع محلّ الدّراسة أمّهات ولدن خلال سنة 2004.
ب) الميزة المدروسة هي أعمار الأمّهات.
ج) لدينا: $5 = 40 - 45 = 35 - 40 = 30 - 35 = 25 - 30 = 20 - 25 = 15 - 20$
ومنه فالفئات متساوية المدى.
د) العدد الإجمالي للولادات بهذا المستشفى خلال سنة 2004 هو 4591.

ارشادات وتوجيهات

$390 \times \frac{1}{2} = 195$

$390 \times \frac{1}{3} = 130$

$390 \times \frac{1}{6} = 65$

تكرار القيمة 12 هو عدد مرّات ظهورها

تكرار الفئة $[13;15[$ هو عدد مرات ظهور القيمتين 13 و 14

لتحديد عدد الفئات المتساوية المدى:
– نطرح أصغر قيمة من أكبر قيمة.
– نقسم النّاتج على مدى (طول) الفئة.
– نأخذ القيمة المقرّبة للنّاتج بالزّيادة إلى الوحدة.

مركز الفئة $[12;17[$ هو x.
حيث: $x = \frac{12+17}{2} = 14,5$

عدد أيّام سنة 2004 هو 366 لماذا؟

الإجابة صحيح.

الكفاءات المستهدفة

- حساب تكرارات، حساب تكرارات نسبية (التواتر).
- حساب الوسط المتوازن لسلسلة إحصائية.

تمارين

1. خلال شهر أوت كان رياض يتردد أسبوعيا على المسبح البلدي. والجدول المرفق يعرض تردده الأسبوعي:
والجدول المرفق يعرض تردده الأسبوعي:
أ) أكمل الجدول.
ب) احسب معدل تردّد رياض على المسبح أسبوعيا.

الأسبوع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
عدد المرات (التكرار)	6	3	5	6
التكرار النسبي (التواتر)				

2. السلسلة الآتية تمثل نتائج رمي قطعة نقدية 15 مرة:
و، ش، و، و، و، ش، ش، و، و، و، ش، ش، و، و
حيث "و" يرمز للوجه و "ش" يرمز للشعار.
احسب التكرار النسبي (تواتر) لكل من الوجه والشعار.

الوجه "و"

الشعار "ش"

3. إذا علمت أن سلسلة الأعداد 4، 9، 5، 6، 13، 12، 8، وسطها يساوي 8، فاحسب قيمة x.

4. يمثل الجدولان أدناه علامات أميرة وعلامات زميلها عبد النور في أربع مواد.
أي التلميذين معدله أحسن في هذه المواد الأربع؟

المادة	ر ي	ع ف	ل ر	ع ط
المعامل	4	1	3	2
العلامة	17	15	16	15,5

المادة	ر ي	ع ف	ل ر	ع ط
المعامل	4	1	3	2
العلامة	18	12,5	14,5	17

5. عُدْ إلى التمرين الثالث من البطاقة 24، وباستعمال الجدول (أ) مرة، والجدول (ب) مرة أخرى احسب بالتدوير إلى 0,01 متوسط أعمار تلاميذ القسم (3 م1). ماذا تستنتج؟

6. التمثيل البياني المرفق يعرض أرباح شركة بملايين الدينارات.
أ) احسب معدل الرّبح السنوي لهذه الشركة خلال الفترة من 2000 إلى 2003.
ب) اكتب الناتج كتابة علمية بالدّينار.

7. للتسجيل في كلية الطب يُشترط على حملة شهادة البكالوريا الجدد معدل 13 من 20 في المواد: العلوم الطبيعية بمعامل 5، الرياضيات بمعامل 4، والفيزياء بمعامل 3.
أ) أميرة حصلت على 15 في مادة العلوم الطبيعية، و13,5 في مادة الرياضيات، و10 في مادة الفيزياء. فهل يسمح لها بالتسجيل في كلية الطب؟
ب) عبد النور حصل على 14 في مادة العلوم الطبيعية، و12 في مادة الفيزياء. ما العلامة التي ينبغي أن يحصل عليها في مادة الرياضيات حتى يسمح له بالتسجيل في كلية الطب.

أصحيح أم خطأ؟

لا يمكن للوسط المتوازن لسلسلة أن يتعدى أكبر قيمة في هذه السلسلة

حلول التمارين

1. 1)

الأسبوع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
عدد المرات (التكرار)	6	3	5	6
التكرار النسبي (التواتر)	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{6}{20}$

ب) معدل تردّد رياض على المسبح أسبوعيا هو وسط السلسلة ويساوي :

$$M = \frac{2 \times 6 + 1 \times 3 + 1 \times 5}{4} = 5$$

2.

ش	و	الشعار
5	10	التكرار
$\frac{5}{20}$	$\frac{10}{20}$	التواتر

ش	و	الشعار
5	10	التكرار
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	التواتر

3. لدينا $\frac{4+9+5+6+13+12+x}{7} = 8$ ومنه $49 + x = 56$ وبالتالي $x = 7$.

إذن قيمة x هي 7.

4. حساب معدل علامات أميرة $M = \frac{4 \times 17 \times 15 + 3 \times 16 + 2 \times 15,5}{10} = 16,2$

حساب معدل علامات عبد النور $M = \frac{4 \times 18 + 1 \times 12,5 + 3 \times 14,5 + 2 \times 17,5}{10} = 16,2$

لأميرة وعبد النور المعدل نفسه.

5. من الجدول (أ) نجد: $M = \frac{8 \times 11 + 13 \times 12 + 7 \times 13 \times 2 \times 14 + 5 \times 15 + 1 \times 16}{10} = \frac{454}{36} = 12,61$

من الجدول (ب) نجد : $M = \frac{12 \times 12 + 9 \times 14 + 6 \times 16}{36} = \frac{474}{36} = 13,17$

نستنتج أنّ المتوسط يتغير عندما نستعمل مراكز الفئات بدل قيم الميزة وهذا متوقع.

6. 1) معدل الرّبح السنوي لهذه الشركة خلال الفترة من 2000 إلى 2003 يساوي: $M = \frac{24 + 42 + 48 + 36}{4} = 37,5$ أي 37,5 مليون دينار.

ب) كتابة 37,5 مليون دينار كتابة علمية بالدّينار هي $3,75 \times 10^7$ دينارا.

7. 1) معدل علامات أميرة $M = \frac{5 \times 15 + 4 \times 13,5 + 3 \times 10}{12} = 13,25$

نعم يسمح لأميرة بالتسجيل في كلية الطب

ب) نفرض أنّ علامة الرياضيات هي x ومنه $13 = \frac{5 \times 14 + 4 \times x + 3 \times 12}{12}$

معناه $21 \times 31 = 07 + 4 \times x + 36$ ومنه $4 \times x = 156 - 70 - 36 = 50$ أي $x \frac{50}{4} = 12,5$

وبالتالي فالعلامة التي ينبغي أن يحصل عليها عبد النور في مادة الرياضيات هي على الأقل 12.5.

إرشادات وتوجيهات

- العدد الإجمالي هو: $6+5+3+6$
- يمكن الاختزال مثل $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
- لاحظ أنّ: $\frac{6}{20} + \frac{5}{20} + \frac{3}{20} + \frac{6}{20} = 1$
- نحسب الفرق بين معدليهما من ا المقارنة بينهما.
- الجدول (أ) من التمرين الثالث البطاقة 24.

العمر (بالسنة)	11	12	13	14	15	16
التكرار	8	13	7	2	5	1

- الجدول (ب) من التمرين الثالث البطاقة 24 وفيه نستعمل مراكز الفئ
- 37,5 مليون دينار تكتب

الفئة	[12;13[	[12;15[	[15;17[
التكرار	8	13	7

37 500 000 00 دينارا

- يجب أن تكون علامة الرياضيات أك من قيمة x أو تساويها.

تنظيم المعطيات (3)

الكفاءات المستهدفة

* حساب الوسط المتوازن لسلسلة إحصائية (تابع).

مكتسبات

* تجميع معطيات إحصائية في فئات وتنظيمها في جدول.
* بعض المعارف حول المجدول (Excel)

ما يلزمك معرفته

1) لحساب الوسط المتوازن لسلسلة غير منظمة في فئات:

* نضرب كل قيمة بتكرارها.
* نجمع الجداءات المحصل عليها.
* نقسم الناتج على مجموع التكرارات.

2) لحساب الوسط المتوازن لسلسلة إحصائية منظمة في فئات:

* نحسب مركز كل فئة.
* نضرب كل مركز بالتكرار الموافق له.
* نجمع الجداءات المحصل عليها.
* نقسم الناتج على مجموع التكرارات.

ملاحظات هامة

* الوسط يتأثر بالقيم الشاذة.

مثال: الوسط الحسابي للسلسلة:
8 ; 9 ; 11 ; 20 هو 12
والسلسلة 14 ; 13 ; 11 ; 1 هو 9,75

* في بعض السلاسل الإحصائية الوسط ليست له دلالة مميزة.

مثال: أحترس! فقد تغرق في نهر معدل عمقه 50 cm

قد لا تكون للوسط دلالة تذكر بالنسبة إلى بعض السلاسل. البعض يعطي المثال الآتي: زميلي غرق في نهر معدل عمقه يساوي 30 cm.

تمارين

1. إليك علامات الفروض في مادة الرياضيات التي تحصل عليها رشيد خلال السنة الدراسية الماضية:

الفصل الأول: 12 و9 و10 و13.
الفصل الثاني: 10 و11 و9.
الفصل الثالث: 13 و11.

أ) احسب معدل مجموعة الفروض التسعة.
ب) احسب معدل كل فصل، ثم معدل القيم الثلاث التي وجدتها (المعدل السنوي).
ج) قارن نتيجة الفرع (أ)، بمعدل الفصول الثلاثة، واشرح.

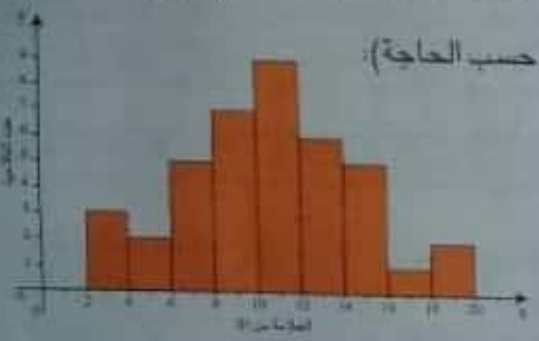
2. إليك سلسلة الأعداد:

أ) أحسب وسط هذه السلسلة:
12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 15 ; 15 ; 15 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17

ب) نظم في جدول معطيات هذه السلسلة على شكل فئات متساوية المدى طول كل منها 4، واحسب وسطها المتوازن باستعمال مراكز الفئات.
18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22

ج) هل حصلت على النتيجة نفسها في الجزأين (أ) و (ب)؟ اشرح لماذا.
23 ; 23 ; 23 ; 23 ; 23 ; 23 ; 23 ; 23 ; 23 ; 23

3. يمثل المخطط المرفق علامات اختبار مادة الرياضيات لقسم (3م1)، اعتمادا على معطيات هذا المخطط:
24 ; 24 ; 26 ; 26 ; 28 ; 28 ; 28 ; 29 ; 29 ; 29



أ) أكمل الجدول الآتي (أضف أعمدة حسب الحاجة):

الفئة		
مركز الفئة		
التكرار		
التواتر		

ب) احسب معدل هذا القسم.
ج) علما أن العلامات هي:
3 ; 3,5 ; 3,5 ; 5 ; 5 ; 6,5 ; 7 ; 7,5 ; 7,5 ; 7,5
8,5 ; 9 ; 9 ; 9,5 ; 9,5 ; 9,5 ; 10 ; 10,5 ; 11 ; 11
11,5 ; 11,5 ; 11,5 ; 11,5 ; 12 ; 12,5 ; 13 ; 13 ; 13
13,5 ; 14 ; 14,5 ; 15 ; 15 ; 15,5 ; 16 ; 19
احسب معدل القسم من جديد. هل وجدت نفس الناتج؟ اشرح.

5. يعمل بإحدى المؤسسات 235 موظفا، من بينهم 15 إطارا. إذا علمت أن الراتب الشهري المتوسط للإطارات يساوي 35 000 DA، والراتب الشهري المتوسط للعمال الآخرين يساوي 15000 DA، فاحسب الراتب الشهري المتوسط لكل موظفي هذه المؤسسة (تعطى النتيجة بالتدوير إلى 0,01).

6. الجدولان المرفقان ينظمان سلسلتين إحصائيتين لهما نفس الوسط 11,8.
احسب العدد المجهول في كل منهما.

الجدول (1)

القيمة	9	11	?
التكرار	8	12	10

الجدول (2)

القيمة	11	12	15
التكرار	12	16	?

صحيح أم خطأ؟ وسط السلسلة محصور بين أصغر قيمة وأكبر قيمة فيها

حلول التمارين

1. 1) معدل مجموعة القروض التسعة صورا إلى 10^{-3} هو:
$$M = \frac{12+9+10+13+10+11+9+13+11}{9} = 10,89$$
ب) معدل الفصل الأول هو 11، معدل الفصل الثاني هو 10، معدل الفصل الثالث هو 12، المعدل السنوي هو 11.
ج) النتيجتان مختلفتان لأننا في الفرع (ب) لم نأخذ في الحساب التكرارات.

2. 1)
$$M = \frac{4\times12+3\times15+3\times17+4\times18+6\times22+10\times23+2\times24+2\times26+3\times28+3\times29}{40}$$
$$= 21,23$$

ب)

الفئة	[12;16[	[16;20[	[20;24[	[24;28[	[28;32[
مركز الفئة	14	18	22	26	30
التكرار	7	7	16	4	6

$$M = \frac{7\times14+7\times18+16\times22+4\times26+6\times30}{40} = 2,15$$

ج) لم نحصل على النتيجة نفسها، بينما المتوسطة في الفرع 1) أدق من المتوسط في الفرع ب) وذلك راجع إلى أن مركز الفئة لا يعبر عن الفئة ككل.

3. 1)

الفئة	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[	[12;14[	[14;16[	[16;18[	[18;20[
مركز الفئة	3	5	7	9	11	13	15	17	19
التكرار	3	2	5	7	9	6	5	1	2
التواتر	0,075	0,05	0,125	0,175	0,225	0,15	0,125	0,025	0,05

ب) معدل القسم باستعمال الجدول أعلاه (أي الفئات) يساوي 10,59.
ج) معدل القسم باستعمال كل العلامات يساوي 10,6.

4. 1) لدينا $220 = 15 - 235$ ومنه عدد العمال غير الإطارات هو 220.
الراتب الشهري المتوسط لكل موظفي هذه المؤسسة هو:
$$M = \frac{15\times35000+220\times15000}{235} = 16276,60 \text{ DA}$$

5. 1) نفرض أن العدد المجهول في الجدول (1) هو x
فيكون $\frac{8\times9+12\times11+10\times x}{30} = 11,8$ DA معناه $10x = 354 - 204$ ومنه $x = 15$
نفرض أن العدد المجهول في الجدول (2) هو y
فيكون $\frac{12\times11+16\times12+y\times15}{28+y} = 11,8$ معناه $324+y\times15 = 330,4+11,8\,y$
أي لما $3,2\,y = 6,4$ ومنه $y = 2$

القيمة	9	11	15
التكرار	8	12	10
الوسط	11,8		

الجدول (1)

القيمة	9	12	15
التكرار	12	16	2
الوسط	11,8		

الجدول (2)

إرشادات وتوجيهات

- في (ج) إذا أردنا أن نصحح فإننا نحسب كما يأتي:
$$M = \frac{4\times11+3\times10+2\times12}{9} = 10,89$$

- لحساب الوسط المتوازن لسلسلة ما نقوم:
– بضرب كل قيمة بتكرارها.
– نجمع الجداءات المحصل عليها.
– نقسم الناتج على مجموع التكرارات.

ب) قيمها مجمعة في فئات:
– نحسب مركز كل فئة.
– نضرب كل مركز بالتكرار الموافق له.
– نجمع الجداءات المحصل عليها.
– نقسم الناتج على مجموع التكرارات.

- طبعا في التمرين 3 الجزء (ج) لا نجد نفس النتيجة. والسبب واضح يمكن الرجوع إلى التمارين 1 و 2 أعلاه.

- في التمرين 4 ينبغي في البداية حساب عدد العمال غير الإطارات.

- نترجم ما في الجدول إلى معادلة علما أن المجهول هو قيمة.

- نترجم ما في الجدول إلى معادلة علما أن المجهول هو تكرار ويدخل في حساب مجموع التكرارات.

الإجابة صحيح

27 تنظيم المعطيات (4)

الكفاءات المستهدفة

- تقديم سلسلة إحصائية في جدول وتمثيلها بمخطط أو بيان (المضلع التكراري، المدرج التكراري...).

مكتسبات

- قراءة معطيات إحصائية وتفسيرها.
- مصطلحات: مجتمع، مميزة... إلخ.

ما يلزمك معرفته

بعض تمثيلات سلسلة إحصائية

1. المدرج التكراري

2. المضلع التكراري

يُمثل بخط منكسر يصل النقط التي فواصلها مراكز الفئات، وترتيباتها التكرارات الموافقة لها

3. المخطط الدائري

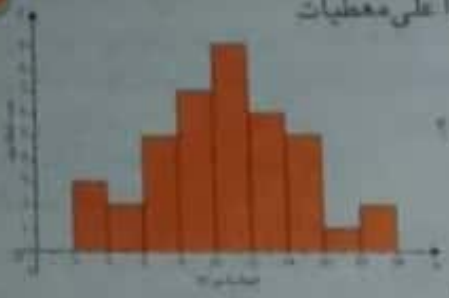
- حيث تقابل كل قيمة (أو فئة أو نسبة) للمميزة (الطبع) المدروسة بقطاع دائري زاويته متناسبة مع العدد الموافق لها

تعليمات و تقنيات

في التمثيل بمخطط دائري أو نصف دائري للتكرارات (أو النسب المئوية) متناسبة مع الزوايا المركزية الموافقة لها

تمارين

1. يمثل المخطط المرفق علامات اختبار مادة الرياضيات لقسم (1 م1)، اعتمادا على معطيات هذا المخطط أجب عما يأتي:



أ) ما نوع هذا المخطط ؟
ب) هل العلامات موزعة في فئات ؟ ما هو عددها ؟ هل هي متساوية المدى ؟
ج) ما هي الفئة الأكبر تكرارا ؟
د) ما هو عدد تلاميذ هذا القسم ؟
هـ) إذا علمت أن أميرة و عبد النور من هذا القسم، و أن علامة عبد النور هي 16 من 20 فهل يمكن أن تكون علامة أميرة 17 من 20 ؟

2. مثل بمخطط الأعمدة التكرارات المتحصل عليها في التمرين الأول من البطاقة السابقة.

3. ارسم المضلع التكراري للجدول المحصل عليه في الجزء (أ) من التمرين الثالث من البطاقة السابقة، و المدرج التكرار للجدول المحصل عليه في الجزء (ب).

4. مثل معطيات الجدول الذي تحصلت عليه في الجزء (ج) من التمرين الرابع من البطاقة السابقة بمدرج التكرارات، ثم بمضلع التكرارات.

5. تاجر يبيع قمصانا مختلفة المقاسات ومصنفة كما يأتي: XL، L، M، S

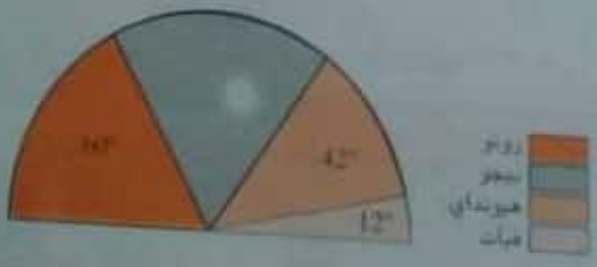
الجدول المرفق يمثل مبيعاته خلال شهر.

الفئة	S	M	L	LX
عدد المبيعات	11	18	12	4

مثل هذه المبيعات بمخطط دائري.

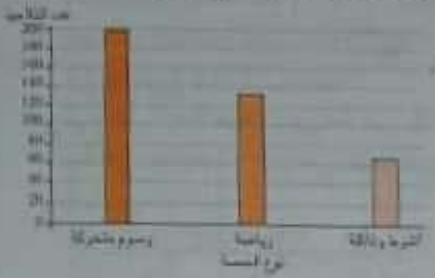
6. يمثل المخطط نصف الدائري المرفق توزيع 30 سيارة حسب النوع تابعة لحضيرة إحدى الولايات:

أ) احسب قيس الزاوية الموافقة لفئة سيارات بيجو.
ب) احسب تكرار كل فئة.
ج) مثل معطيات الشكل والتكرارات التي تحصلت عليها بجدول.



حلول التمارين

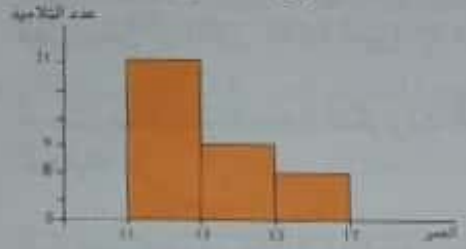
1. أ) المخطّط هو مدرّج تكراري.
ب) نعم العلامات موزّعة في فئات عددها 9. الفئات متساوية المدى ومدى كلّ منها هو 2.
ج) الفئة الأكبر تكرارا هي [10;12[.
د) لدينا $40 = 3+2+2+5+7+9+6+5+1+2$ ، ومنه عدد تلاميذ هذا القسم هو 40.
هـ) بما أنّ علامة عبد النّور هي 16 من 20، فلا يمكن أن تكون علامة أميرة 17 من 20 لأنّ تكرار الفئة [16;18[هو 1.



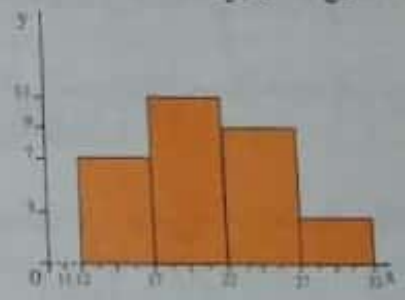
2. تمثيل تكرارات التّمرين الأول من البطاقة السابقة بمخطّط الأعمدة.

3. المضلّع التكراري للجدول (أ)

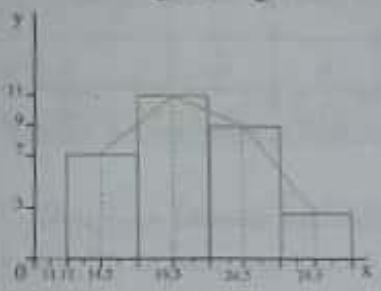
المدرّج التكراري للجدول (ب)



4. المدرّج التكراري

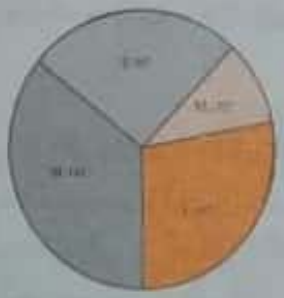


المضلع التكراري



5.

الفئة	S	M	L	XL
عدد المبيعات	11	18	12	4
الزاوية المقابلة	88°	144°	96°	32°



عدد القمصان المباعة يساوي 45.
لأحظ أنّ $32 + 96 + 144 + 88 = 360$

6. 1) لدينا: $180 - (60 + 42 + 12) = 60$، ومنه قيس الزّاوية الموافقة لفئة سيارات بيجو هو 60°.
ب) لحساب التكرار نستعمل جدول تناسبيّة في كلّ فئة، فمثلا:

180°	12°
30	x

ومنه $x = \frac{30° \times 12}{180} = 2$.

تمثيل معطيات الشكل والتكرارات بجدول:

الفئة	بيجو	رونو	هيونداي	فيات
الزاوية	60°	66°	42°	12°
التكرار	10	11	7	2

إرشادات وتوجيهات

- مدى الفئة هو طولها، مثلا طول الفئة [10;12[هو $12-10=2$
- الفئة الأكبر تكرارا هي التي يقابلها أكبر عدد من التلاميذ
- عدد التلاميذ يساوي مجموع تكرارات الفئات.
- جدول تكرارات التمرين الأول من البطاقة السابقة:

الحصة المفضلة	رسوم متحركة	رياضة	أشرطة وثائقية
التكرار	195	130	65

- الجدول المحصّل عليه في الجزء (أ) من التّمرين الثالث من البطاقة السابقة

العمر (بالسنة)	11	12	13	14	15	16
التكرار	8	13	7	2	5	1

- الجدول المحصّل عليه في الجزء (ب)

الفئة	[11;13[	[13;15[	[15;17[
التكرار	21	9	6

- الجدول المحصّل عليه في الجزء (أ) من التّمرين الثالث من البطاقة السابقة

...	[12;17[	[17;22[	[22;27[	[27;32[
مركز الفئة	14,5	19,5	24,5	29,5

- في التّمرين 5 نحسب الزّاوية المقابلة للفئة بإكمال جدول تناسبيّة، فمثلا:

45	11
360°	x

ومنه $x = \frac{360° \times 11}{45} = 88°$

تنظيم المعطيات (5)

الكفاءات المستهدفة • استعمال المجدولات في استغلال معطيات إحصائية. (مجدول إكسل "Excel")

ما يجب معرفته

1 حساب مجموع قيم

– أحجز القيم المراد حساب مجموعها، مثلا 12، 15، 23 في الخلايا A1 ، B1 ، C1.
– أنقر على الخلية D2، ثم على Σ.
ثم على اللمسة ↵ يمكن كتابة عبارة المجموع مباشرة في الخلية D2 كما يلي:
=SOMME (A1:C1)

	A	B	C	D	E
1	12	15	23	=somme (A1 : C1)	

• تأكد من أن العدد الظاهر في الخلية D2 هو مجموع الأعداد 12، 15، 23.

للتمرن (1)
أحجز القيم 38 ، 76 ، 99- في الخلايا A3، A2 ، A1 على الترتيب، واحسب مجموعها في الخلية A4 باستعمال Σ

طريقة ثانية:
أحجز في الخلية D4، العبارة SOMMEPROD (A1: C1 ; A2 : C2) ، ثم اضغط على اللمسة ↵
ما هو العدد الذي يظهر في الخانة D4 ؟ تحقق من ذلك

للتمرن (2) احسب المجموع $A = 23 \times 1,5 - 7 \times 4,2 + 0,8 \times 31$

تخصيص عرض النتائج

مثال: عرض نتيجة الجداء $P = 923,45676 \times 61$
أحجز العاملين 923,45676 و 61 في الخليتين A1 و B1 على الترتيب
أحجز في الخلية C1 العبارة (=$A$1*$B$1 أو PRODUIT $A$1;$B$1) = ثم اضغط على اللمسة ↵
عمم محتوى الخلية C1 إلى الخلية G1.

	A	B	C	D	E	F	G
	923,45676	61	56330,86	56330,86	56330,86	56330,86	56330,86

– وسّع في عرض العمود C حتى تظهر كل أرقام ناتج الجداء (انظر الشكل المرفق.)
– تصرف في عرض العمود D حتى يظهر الناتج مدورا إلى الوحدة
– تصرف في عرض العمود E حتى يظهر الناتج مدورا إلى 0,1.
– انقر فوق الخلية F1 ثم اختر Cellule في قائمة Format وفي أيقونة Nombre اختر Nbr في قائمة Catégorie : ، واختر 3 في Nombre de décimales: ثم OK
– أنقر فوق الخلية G1 ثم اختر Cellule في قائمة Format وفي أيقونة Nombre اختر Nbr في قائمة Catégorie : ، واختر 9 في Nombre de décimales: ثم OK
تحصل على النتيجة الآتية:

	A	B	C	D	E	F	G
1	923,45676	61	56330,86236	56331	56330,9	56330,862	5,633086236E+04
2			عرض عادي	مدور		عرض مخصص	كتابة علمية مخصصة

2 حساب مجموع جداءات :

مثال: $A = 17 \times 3 + 24 \times 15 + 62 \times 9$
– أحجز العوامل 17، 24، 62 في الخلايا A1 ، B1 ، C1، والعوامل 3، 15، 9 في الخلايا A2 ، B2 ، C2 على الترتيب.
طريقة أولى: أحجز في الخلية A3 العبارة A1×A2 أو PRODUIT (A1;A2) ×
ثم اضغط على اللمسة ↵
ما هو العدد الذي يظهر في الخانة A3 ؟ تحقق من ذلك. عمم محتوى الخلية A3 إلى الخلية C3. ما هما العددان الظاهران في كل من B3 و C3 ؟ تحقق من ذلك. احسب في الخلية D3 مجموع محتويات الخلايا A3 ، B3 ، C3.

	A	B	C
1	17	24	62
2	3	15	9
3	A1×A2		

دليل

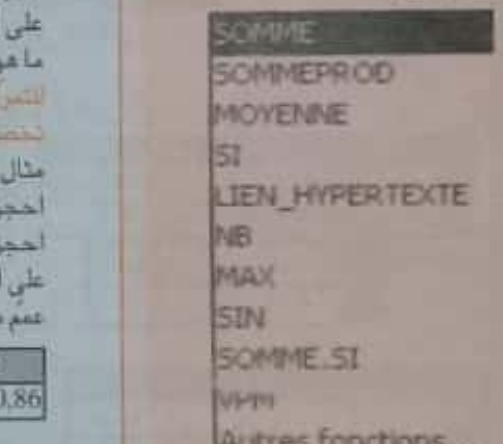
• Somme تعني مجموع

• تعميم محتوى خلية:
نعمّم محتوى الخلية A1 إلى الخلية A1 بوضع الزّالق على الزّاوية السّفلى على اليمين للخلية A1

فيتحول إلى رمز + ، عندئذ نضغط على الزرّ الأيمن للفأرة ونسحب حتى الخلية A1.

Sommeprod اختصار لـ Somme produits : وتعني مجموع جداءات

يمكن استعمال Autres fonctions من القائمة أدناه:



ملاحظة

يساعد برنامج إكسل أثناء كتابة العبارات الحسابية باستعمال مؤشر الفأرة لتحديد الخلايا المعنية.

نكتب A1 ونضغط على اللمسة F4 فنحصل على $A$1 وهذا يؤدي إلى تثبيت الخلية A1.

تمارين وإرشادات

1. إليك برمجة حساب باستعمال مجدول إكسل.

	A	B	C	D
1	12	14	23	= SOMME (A1:C1)
2	2	7	5	
3	=A1*A2			= SOMME (A3:C3)/D2

أ) ما هو الناتج في الخلية D1 ؟

ب) ما هو الناتج في الخلية A3 ؟

ج) أنجز ورقة الحساب هذه، وعمّم D1 إلى D2 ، و A3 إلى C3. ما هو الناتج في الخلية D3 ؟

د) احجز في الخلية D4 العبارة SOMME (A2:C2) / SOMMEPROD (A1:C1;A2:C2) = ما هو الناتج في الخلية D4 ؟

2. احسب وسط كلّ من السلاسل الآتية باستعمال MOYENNE (..... ; .....) في ورقة حساب من مجدول إكسل.

أ) 4 ، 11 ، 13 ، 9 ب) 8 ، 13 ، 14 ، 15 ، 11 ، 7 ج) 12 ، -3,5 ، 5 ، -15,8 ، 4

3. يمثل الجدول المرفق توزيع عدد العائلات تبعا لعدد الأبناء

عدد الأبناء	0	1	2	3	4	5	أكثر من 5
التكرار	9	16	27	32	35	21	11

في حي الزهور أ) انقل الجدول المرفق على ورقة مجدول إكسل.

ب) احسب في الخلية I2 مجموع عدد العائلات.

ج) لحساب التكرار النسبي (التواتر) لكل قيمة، احجز في الخلية A3 عباوة التكرار النسبي، وفي الخلية B3 العبارة B2/$I$2 = (أي حاصل قسمة قيمة الخلية B2 على قيمة الخلية I2)، ثمّ عمّم محتوى الخلية B2 إلى الخلية H2.

د) تحقق في الخلية I3 مجموع التكرارات النسبية (التواترات) يساوي 1.

هـ) لتمثيل التكرارات بالأعمدة :

- حدّد باستعمال مؤشر الفأرة الخلايا من B2 إلى H2 ، ثمّ انقر على معالج البيانات ، ثمّ على Suivant
- لإرفاق محور القواصل بقيمه : انقر فوق Série في نافذة المرحلة الثانية، ثمّ انقر داخل مكان الحجز المخصص لـ : Etiquettes de l'axe des abscisses (X) وباستعمال مؤشر الفأرة حدّد الخلايا من B1 إلى H1 ، ثمّ على Suivant
- احجز عبارة "عدد الأبناء" في المكان المخصص لـ : Axe des abscisses (X) ، و عبارة "التكرار" في المكان المخصص لـ : Axe des ordonnées (Y) ثمّ على Terminer

ملاحظة يسمح مجدول إكسل بإجراء عدّة تغييرات إضافية على تمثيل التكرارات الناتج متعلقة بالوحدة، أو اللون، أو نمط الخط، أو الحجم، ... إلخ

4. لمتابعة نتائجه المدرسية يستعمل أمين ورقة حساب من مجدول إكسل كما في الشكل المرفق.

أ) انقل الجدول على ورقة حساب من مجدول إكسل، واحسب معدّل مادة الرياضيات في الخانة F2.

	A	B	C	D	E	F
1	المادة	المشاركة	ف 1	ف 2	الاختبار	المعدل
2	رياضيات	17,5	19	17,5	19	

ب) أمين لم يأخذ في الحسبان المعاملات الآتية. احسب المعدل باعتبار المعاملات.

	A	B	C	D	E
1	المشاركة	ف 1	ف 2	الاختبار	
2	1	2	3	5	

إرشادات

1

	A	B	C	D
1	12	14	23	49
2	2	7	5	14
3	24	98	115	16,92857143
4				16,92857143

2

	A	B	C	D	E	F	G
1	السلسلة						الوسط
2	4	11	13	9			9,25
3	12	-3,5	5	-15,8	4		0,35
4	8	13	14	15	11	7	11,33333

3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	عدد الأبناء	0	1	2	3	4	5	أكثر من 5	
2	التكرار	21	19	32	46	39	30	13	200
3	التكرار النسبي	0,105	0,095	0,16	0,23	0,195	0,15	0,065	1

4

احجز في الخلية F2 في الحلة الأولى العبارة MOYENNE (B2:E2) =

وفي الحلة الثانية العبارة SOMME (B2:E2)/ SOMMEPROD (B2:E2;B3:E3) =

حالة الأولى

	A	B	C	D	E	F
1	عدد الأبناء	المشاركة	ف 1	ف 2	الاختبار	المعدل
2	رياضيات	17	15	18	19	17,25

حالة الثانية

	A	B	C	D	E	F
2	المعامل	1	2	3	5	
3	رياضيات	17	15	18	19	17,818

الكفاءات المستهدفة

• معرفة حالات تقايس المثلثات واستعمالها في براهين بسيطة.

مكتسبات

• المثلثان المتقايسان بالتناظر المركزي أو التناظر المحوري.

ما يلزمك معرفته

1. المثلث المتقايس

المثلثان المتقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق.

2. حالات تقايس مثلثين

المثلثان المتناظران بالنسبة إلى مستقيم متقايسان.

مثال:

بما أن المثلث ABC و A'B'C' متناظران بالنسبة إلى المستقيم (D) فهما متقايسان.

حالة التناظر بالنسبة إلى نقطة

المثلثان المتناظران بالنسبة إلى نقطة متقايسان.

مثال:

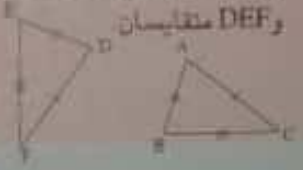
بما أن المثلثين ABC و A'B'C' متناظران بالنسبة إلى النقطة O فهما متقايسان.

حالات أخرى

الحالة 1

يتقايس مثلثان إذا تقايست أضلاعهما مثنى مثنى.

مثال: بما أن AB = DE و AC = DF و BC = EF فإن المثلثين ABC و DEF متقايسان.



تمارين

1. ارسم مثيلا للشكل المقابل، ثم أنشئ المثلث A'B'C' نظير المثلث ABC بالنسبة إلى (D).
تحقق باستعمال الورق الشفاف أن المثلثين ABC و A'B'C' متقايسان.

2. نفس أسئلة التمرين السابق من أجل المثلث ABC والنقطة O

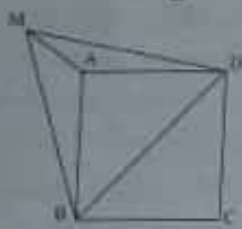
3. ABC مثلث كيفي، (AD) المتوسط المتعلق بالضلع [BC].
النقطة M نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D. بيّن أن المثلثين ADC و MDB متقايسان واستنتج عناصرهما المتماثلة.

4. ABCD مربع، N ،M منتصف [BC] و[CD] على الترتيب.
أ) بيّن أن المثلثين ABM و ADN متناظران بالنسبة إلى المستقيم (AC)، واستنتج أنهما متقايسان.
ب) نفس السؤال بالنسبة إلى المثلثين AMC وANC.
ج) استنتج أن [AM] و[AC] و[AN] تقسم المربع ABCD إلى أربعة أجزاء متساوية المساحة.

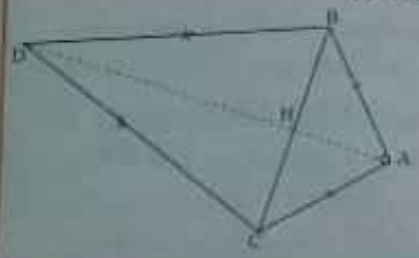
5. ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A، (AD) المتوسط المتعلق بالضلع [BC] بيّن أن المثلثين ADC و ABD متقايسان. واستنتج أن:
أ) (AD) هو ارتفاع في المثلث ABC متعلق بالضلع [BC].
ب) (AD) هو منصف زاوية الرأس A.

6. ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A، محور [AB] ومحور [AC] متقاطعان في النقطة I.
أ) برهن على أن المثلثين ABI و ACI متقايسان.
ب) استنتج أن المثلثين ABI و ACI متناظران بالنسبة إلى (AI).

7. يمثل الشكل المرفق مربعا ABCD، ومثلثا متقايس الأضلاع BDM.
أ) أثبت أن المثلثين ABM و ADM متقايسان.
ب) استنتج وضع (AM) بالنسبة إلى المثلث BDM.
ج) استنتج أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (AM).



8. علما أن ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين رأسه الأساسي A، وBCD مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي D، و [BC] و[AD] يتقاطعان في النقطة H.
أ) أثبت أن المثلثين ABD وACD متقايسان.
ب) بيّن أن (AD) محور [BC].



صحيح أم خطأ؟ كل مثلثين متساويين في المساحة متقايسان.

حلول التمارين

1. ننشئ $A'B'C'$ نظائر النقط A,B,C بالنسبة إلى (D) على الترتيب.
2. ننشئ نظائر النقط بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب

3. بما أنّ النقط C,D,B في استقامية و(AD) المتوسّط المتعلق بالضلع [BC] فإنّ النقطة B نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة D، ومنه المثلثان ADC و MDB متناظرين بالنسبة إلى النقطة D فهما متقايسان. نستنتج أنّ:
$AC=BM$ و $DB=DC$ و $DA=DM$
و $\widehat{ADC}=\widehat{MBC}$ ، $CAD=DMB$ ، $ACD=MBD$.

4. 1) [AC] قطر في المربّع ABCD فهو محور تناظر له النقطة A نظيرة نفسها بالنسبة إلى المستقيم (AC) والنقطتان B و D متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم (AC).
و [BC] نظيرة [DC] وبالتالي فإنّ منتصفيهما M و N متناظران.
ومنه المثلثان ABM و ADN متناظران بالنسبة إلى المستقيم (AC) فهما متقايسان.

ب) بما أنّ النقطتين M و N متناظرتان بالنسبة إلى (AC) و C و A ينتميان إلى المستقيم (AC) فإنّ المثلثين AMC و ANC متناظران بالنسبة إلى المستقيم (AC)، وبالتالي هما متقايسان.
ج) للمثلثين AMC و ABM نفس المساحة، وكذلك للمثلثين ANC و ADN نفس المساحة (المتوسّط في مثلث يقسمه إلى جزء بن لهما نفس المساحة). ومنه للأجزاء AMC و ABM و ANC و ADN نفس المساحة وبالتالي فإنّ [AM] و[AC] و[AN] تقسّم المربّع ABCD إلى أربعة أجزاء متساوية المساحة

5. المثلثان ADC و ABD فيهما $AB=AC$ ، (المثلث ABC متساوي الساقين)، و $BD=DC$ [(AD) المتوسّط المتعلق بالضلع [BC]]، و[AD] مشترك.

ومنه فإنّ المثلثين ADC و ABD متقايسان.
أ) نستنتج أنّ $\widehat{ADB}=\widehat{ADC}=90°$ ومنه (AD) هو ارتفاع في المثلث ABC متعلق بالضلع [BC].
ب) كما نستنتج أنّ $\widehat{BAD}=\widehat{DAC}$ ومنه (AD) هو منصّف زاوية الرأس A

6. 1) المثلثان ABI و ACI فيهما $AB=AC$ ، لأنّ ABC متساوي الساقين، و[AI] مشترك، و $BI=CI$ لأنّ كلاً منهما يساوي AI (خاصية محور قطعة مستقيم)

ومنه فإنّ المثلثين ABI و ACI متقايسان.
ب) نستنتج من العناصر المتماثلة أنّ $BAI=CAI$ ومنه (AI) منصّف زاوية الرأس A. وبالتالي فإنّ (AI) محور [AB]
ومنه فإنّ المثلثين ABI و ACI متناظران بالنسبة إلى (AI)

7. المثلثان ABM و ADM فيهما [MA] مشترك، و $MB=MD$ و $AB=AD$ (من المعطيات)، وبالتالي فهما متقايسان

ب) نستنتج أنّ $\widehat{AMD}=\widehat{AMB}$، ومنه (AM) هو منصّف ومتوسّط ومحور وارتفاع في المثلث المتقايس الأضلاع BDM
ج) بما أنّ (AM) محور [BD] فإنّ النقطة C تنتمي إلى المستقيم (AM).

8. 1) المثلثان ABD و ACD فيهما [AD] مشترك، و $AB=AC$ و $DB=DC$ (من المعطيات)، وبالتالي فهما متقايسان.

ب) نستنتج أن $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$ ومنه (AD) منصّف زاوية الرأس الأساسي A في المثلث متساوي الساقين ABC، وبالتالي فإنّ (AD) محورا الضلع [BC].

إرشادات وتوجيهات

- يمكن استعمال الطيّ للتحقق من أنّ المثلثين ABC و A'B'C متقايسان.
- المثلثان المتناظران بالنسبة إلى مستقيم متقايسان.
- المثلثان المتناظران بالنسبة إلى نقطة متقايسان.
- قطرا المربّع متناصفان ومتعامدان.
- كلّ نقطة من المستقيم (AC) هي نظيرة نفسها بالنسبة إليه
- إذا كان ABC مثلثا متساوي الساقين رأسه الأساسي A، فإنّ المتوسّط المتعلق بالضلع [BC]، هو محور [BC] وهو الارتفاع المتعلق بالضلع [BC]، وهو منصّف زاوية الرأس A.
- كلّ مثلث متقايس الأضلاع هو مثلث متساوي الساقين.
- المثلث ABD متساوي الساقين والمستقيم (AM) هو محور [BD] وحامل [AC]

الكفاءات المستهدفة

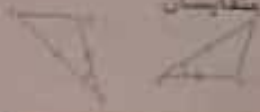
• معرفة حالات تقايس المثلثات واستعمالها في براهين بسيطة (تابع).

ما يلزمك معرفته

ما يلزمك معرفته
1) تقايس مثلثين
الحالة 1

يتقايس مثلثان إذا تقايس فيهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما.

مثال: بما أن $AB = A'B'$ و $BC = B'C'$ و $\widehat{B} = \widehat{B'}$ فإن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متقايسان.



الحالة 2

يتقايس مثلثان إذا تقايس فيهما ضلع والزاويتان اللتان تحصرانه.

مثال: بما أن $AB = RS$ و $\widehat{B} = \widehat{S}$ و $\widehat{A} = \widehat{R}$ فإن المثلثين ABC و RST متقايسان.

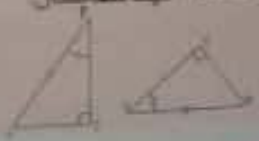
2) حالات تقايس مثلثين قائمين

يتقايس مثلثان قائمان إذا تقايس وتراهما، وضلع قائم من أحدهما مع ضلع قائم من الآخر.

مثال: المثلثان القائمان ABC و $A'B'C'$ وتراهما $[AB]$ و $[A'B']$ متقايسان، و $BC = B'C'$ فيهما متقايسان.

يتقايس مثلثان قائمان إذا تقايس وتراهما، وزاوية حادة من أحدهما مع زاوية حادة من الآخر.

مثال: المثلثان القائمان ABC و RST وتراهما $[AB]$ و $[RS]$ متقايسان، و $\widehat{A} = \widehat{R}$ فيهما متقايسان.

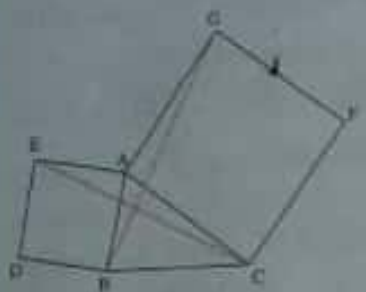


تمارين

1. $ABCD$ متوازي أضلاع، M نقطة من $[AD]$ و N نقطة من $[BC]$ حيث $AM = CN$.
أ) برهن على أنّ المثلثين ABM و CDN متقايسان.
ب) استنتج طبيعة الرّباعيّ $BMDN$.

2. $ABCD$ متوازي أضلاع. أنشئ النّقطة A' نظيرة النّقطة A بالنّسبة إلى النّقطة B، والنّقطة B' نظيرة النّقطة B بالنّسبة إلى النّقطة C، والنّقطة C' نظيرة النّقطة C بالنّسبة إلى النّقطة D، والنّقطة D' نظيرة النّقطة D بالنّسبة إلى النّقطة A.
أ) بيّن أنّ المثلثين $A'BB'$ و $C'DD'$ متقايسان، وأنّ المثلثين $B'CC'$ و $D'AA'$ متقايسان.
ب) استنتج طبيعة الرّباعيّ $A'B'C'D'$.

3. أنشئ مثلا للشكل المقابل حيث ABC مثلث كيفي، وكلّ من $ABDE$ و $ACFG$ مربّع.
أ) بيّن أنّ الزّاويتين $\widehat{EAC}$ و $\widehat{BAG}$ متقايستان.
ب) أثبت تقايس المثلثين EAC و BAG.
ج) استنتج تقايس القطعتين $[BG]$ و $[CE]$.



4. ABC مثلث كيفي، حيث $AC > AB$، النّقطة B' تنتمي إلى $[AC]$ حيث $AB' = AB$، والنّقطة C' تنتمي إلى $[AB]$ حيث $AC' = AC$، و RST برهن على أن القطعتين $[BC]$ و $[B'C']$ متقايستان.

5. $ABCD$ مربّع، S ، R ، N ، M تنتمي إلى $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[DA]$ على التّرتيب حيث $AM = BN = CR = DS$.
ما طبيعة الرّباعيّ $MNRS$ ؟

6. $ABCD$ مربّع مركزه O، (MN) مستقيم ويشمل O، ويقطع $[AB]$ في النّقطة M و $[CD]$ في النّقطة N و (RS) مستقيم يعامد (MN) ويشمل O، ويقطع $[BC]$ في النّقطة R و $[AD]$ في النّقطة S.
أ) بيّن أن المثلثين ASO و CRO متقايسان، وأنّ المثلثين BOM و DON متقايسان.
ب) استنتج طبيعة الرّباعيّ $MRNS$.

7. $ABCD$ مربع، M ، N منتصف $[BC]$ و $[CD]$ على التّرتيب.
أ) برهن على أنّ المثلثين ABM و CBN متقايسان.
ب) استنتج أن المستقيمين (AM) و (BN) متعامدان.

صحيح أم خطأ؟ يتقايس مثلثان قائمان إذا تقايس الضلعان القائمان من أحدهما مع الضلعين القائمين من الآخر.

حلول التمارين

1. 1) برهان على أنّ المثلثين ABM و CDN

متقايسان: بما أنّ $AB = CD$ و $BAM = DCN$ فإنّ المثلثين ABM و CDN متقايسان.

ب) الرباعي BMDN متوازي أضلاع لأنّ $((BN)//(MD)$ و $BN=MD)$

2. 1) المثلثان A'BB' و C'DD' فيهما: $BA = DC$ لأن $(BA=BA\ DC'=DC')$ وكذلك $BB'=DD'$ لأن $(DD'=2\ AD=2\ CB=BB')$

والزاوية $\widehat{A'BB'}$ تقايس الزاوية $\widehat{D'DC'}$ لأنّ

$(\widehat{A'BB'} = 180^o - \widehat{B'BA} = 180^o - \widehat{D'DC} = \widehat{D'DC'})$

ومنه: المثلثان A'BB' و C'DD' متقايسان.

ب) نستنتج أنّ $A'B'=C'D'$ و $A'D=C'B'$، ومنه الرّباعي A'B'C'D' متوازي اضلاع.

3. 1) لدينا $EAB=CAG=90^o$ ومنه

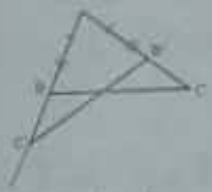
$\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAG} = \widehat{BAC} + \widehat{CAG} = \widehat{BAG}$

وبالتالي فإنّ الزاويتين EAC و BAG متقايستان.

ب) بما أنّ $EA=AB$ و $AC=AG$ والزاويتين $\widehat{EAC}$ و $\widehat{BAG}$ متقايستان فإنّ المثلثين EAC و BAG متقايسان.

ج) نستنتج من تقايس المثلثين EAC و BAG أنّ القطعتين [BG] و[CE] متقايستان.

4. المثلثان ABC و AB'C' فيهما $AC=AC$،



و $AB=AB$ (من المعطيات)، والزاوية $\widehat{C'AC}$ مشتركة فيهما متقايسان. نستنتج أنّ القطعتين [BC] و[B'C'] متقايستان.

5. المثلثات: AMS، BNM، CRN، DSR متقايسة فإن

$NM=RN=SR=MS$

ولدينا: $\widehat{SMA} + \widehat{NMB} = \widehat{SMA} + \widehat{MSA}=90^o$ ومنه $SMN=90^o$

وبالتالي فإنّ الرّباعي MNRS مربّع

6. بما أنّ O مركز ABCD فإنّ $AO = CO$

والزاويتين $\widehat{AOS}$ و $\widehat{COR}$ متقايستان لأنهما متقابلتان بالرأس، والزاويتين $\widehat{SAO}$ و $\widehat{RCO}$ متقايستان لأنّهما متبادلتان داخليا. ومنه المثلثان ASO و CRO متقايسان بنفس الطريقة نبيّن أنّ المثلثين MOB و NOD متقايسان.

ب) نستنتج مما سبق أنّ: $OS = OR$ و $OM = ON$ وبما أنّ (RS) مستقيم يعامد (MN) فإنّ الرّباعي MRNS معيّن.

7. 1) بما أنّ المثلثين ABM و CBN قائمان في B و C على الترتيب و $BN = AM$ و $BM = CN$ فإنّ المثلثين ABM و CBN متقايسان.

ب) بما أنّ $\widehat{NBC} + \widehat{BNC} = 90^o$ فإنّ $\widehat{EBM} + \widehat{BME} = 90^o$:

وبالتالي المثلث EBM قائم في E إذن المستقيمان (AM) و(BN) متعامدان.

إرشادات وتوجيهات

- يتقايس مثلثان إذا تقايس فيهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- لاحظ أنّ النقط A، M، B متقايسة مع النقط C، N، D على الترتيب بالنسبة إلى مركز متوازي الأضلاع ABCD.
- يبرهن بنفس الكيفية وأنّ المثلثين B'CC' و D'AA' متقايسان.
- EAC و BAG متقايستان بالقيام
- من تقايس المثلثين AMS، BNM نستنتج أنّ $NMB = MSA$
- مجموع الزاويتين AMS و BMN يساوي 90^o درجة
- يتقايس مثلثان إذا تقايس فيهما ضلع والزاويتان اللتان تحصرانه.
- قطرا الرّباعي MRNS متعامدان ومتناصفان.
- يتقايس مثلثان قائمان إذا تقايس الضلعان القائمان من أحدهما مع الضلعين القائمين من الآخر.
- $\widehat{BNC} = \widehat{BMA}$

الكفاءات المستهدفة • معرفة خواص مستقيم المنتصفين في مثلث واستعمالها في براهين بسيطة.

مكتسبات

• التناظر المركزي وخواص متوازي الأضلاع.
• خواص التوازي.

ما يلزمك معرفته

1) مستقيم المنتصفين في مثلث هو:
• المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين منه.

2) نظرية:

مستقيم المنتصفين في مثلث يوازي حامل الضلع الثالث

مثال: إذا كان 'B منتصف [AC] و 'C منتصف [AB] فإن: (B'C') // (BC)

3) نظرية:

طول قطعة المستقيم الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث

مثال: إذا كان 'B منتصف [AC] و 'C منتصف [AB] فإن: $B'C' = \frac{1}{2}BC$

4) نظرية (النظرية العكسية):

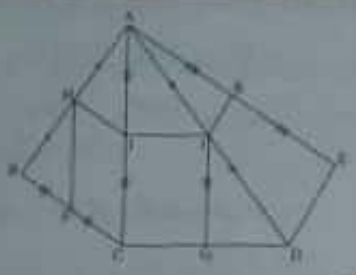
إذا كان مستقيم يشمل منتصف أحد أضلاع مثلث ويوازي ضلعا ثانيا فإنه يشمل منتصف الضلع الثالث

مثال: إذا كان 'B منتصف [AC] و (B'C')//(BC) فإن: 'C منتصف [AB]

أجوبة وتعليقات

• يمكن استعمال النظريات السابقة في:
1- حساب أطوال بمعلومية أطوال مناسبة (انظر التمرين 6)
2- إثبات أن نقطة هي منتصف قطعة مستقيم (انظر التمرين 7)
3- إثبات أن مستقيمين متوازيان.

1. جدْ كلّ المستقيمات المتوازية في الشكل المقابل.

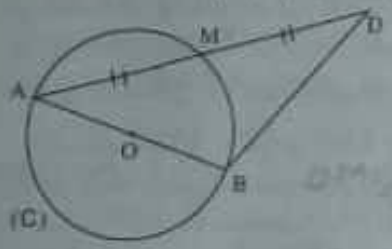


2. (C) و (C') دائرتان مركزاهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A و A'
النقطة B من (C) مقابلة قطريا للنقطة A، والنقطة C من (C') مقابلة قطريا للنقطة A.
بيّن لماذا المستقيمان (OO') و(BC) متوازيان.

3. ABCD رباعي كيفيّ، النقط I ، J ، K ، L منتصفات أضلاعه [AB] ، [DA] ، [CD]
أ) بيّن أنّ (IJ) يوازي (LK)، وأنّ (IL) يوازي (JK).
ب) استنتج طبيعة الرباعي IJKL.

4. ABC مثلث كيفيّ، النقطتان 'B ، 'C نظيرتا النقطتين B ، C بالنسبة إلى النقطة A على الترتيب، I منتصف ['B'C]، و J منتصف ['BC].
أثبت أنّ النقط I ، A ، J في استقامية.

5. (C)، دائرة قطرها [AB]، M نقطة من (C) مختلفة عن A و B، النقطة D نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة M.
ما نوع المثلث ABD ؟



6. أنشئ مثلثا ABC فيه $BC = 6cm$ ، و $\widehat{ABC} = 80°$ و $\widehat{ACB} = 45°$، علّم النقطة M من [AB] حيث $AB = 4AM$، والنقطة N من [AB] حيث $AC = 4AN$
أ) باستعمال النقطتين I ، J منتصفي الضلعين [AB] ، [AC] على الترتيب، برهن على أنّ (MN) يوازي (BC).
ب) استنتج الطول MN وأقياس زوايا المثلث AMN.

7. ABCD، متوازي أضلاع، النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة A، والنقطة F نظيرة النقطة E بالنسبة إلى النقطة D.
برهن على أنّ النقطة C منتصف قطعة المستقيم [BF].

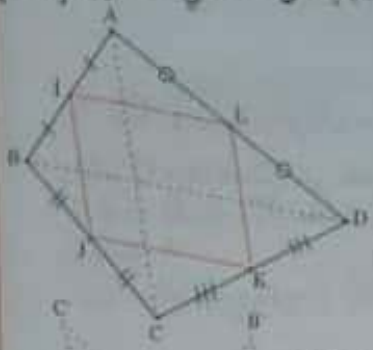
8. A ، B ، C ثلاث نقط في استقامية، O نقطة لا تنتمي إلى (AB)، النقط L ، M ، N منتصفات القطع [OA] ، [OB] ، [OC].
أ) أثبت أنّ النقط L ، M ، N مستقيمة.
ب) متى تكون النقطة M منتصف [LN].

صحيح أم خطأ ؟ معطيات الشكل المقابل تكفي لأن نقول أنّ (IJ) لا يوازي (BC)

حلول التمارين

1. المستقيمات المتوازية هي : (HI) و(BC)
(IJ) و (CD) ، (JK) و (DE) ، (FH) و (CA)
(JG) و(CA) ، (FH) و(JG).

2. المستقيمان (OO') و (BC) متوازيان لأنّ المستقيم (OO') يشمل منتصفي الضلعين [AB] و [AC] في المثلث ABC.



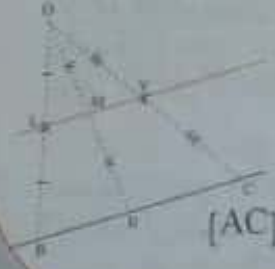
3. أ) بتطبيق نظريّة مستقيم المنتصفين في :
- المثلث ABC نستنتج أنّ (IJ) يوازي (AC)
- المثلث DAC نستنتج أنّ (LK) يوازي (AC) بما أنّ (IJ) يوازي (AC) و (LK) يوازي (AC) فإنّ (IJ) يوازي (LK)
بالطريقة نفسها نجد أنّ (IL) يوازي (JK)
ب) الرباعي IJKL متوازي أضلاع لأنّ كلّ ضلعين منه متقابلان متوازيان

4. بتطبيق نظريّة مستقيم المنتصفين في:
- المثلث B'BC نستنتج أنّ (AI) يوازي (BC)
- المثلث C'BC نستنتج أنّ (JA) يوازي (BC)
بما أنّ (AI) يوازي (BC) و(JA) يوازي (BC)
فإنّ (AI) يوازي (JA). ومنه النقط I ، A ، J في استقامية.

5. لدينا M منتصف [AD] لأنّ النقطة D نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة M. و O منتصف [AB] من المعطيات. وبالتالي فإنّ (OM) يوازي (BD). ومنه $BD = 2\,OM$، لكنّ $AB = 2OM$.
نستنتج أنّ $AB = BD$. وبالتالي فإنّ المثلث ABD متساوي الساقين.

6. أ) بما أنّ $AB = 4AM$ و $AC = 4AN$ و I ، J منتصفا الضلعين [AB] ، [AC] على التّرتيب. فإنّ $AI = 2AM$ و $AJ = 2AN$ ومنه M منتصف [AI] و N منتصف [AJ]. بتطبيق نظريّة مستقيم المنتصفين في:
- المثلث AIJ نستنتج أنّ (MN) يوازي (IJ) و $MN = \frac{1}{2}$ IJ.
- المثلث ABC نستنتج أنّ (IJ) يوازي (BC) و $IJ = \frac{1}{2}AB$
وبما أنّ (MN) يوازي (IJ)، و(IJ) يوازي (BC)، فإنّ (MN) يوازي (BC).
ب) لدينا $MN = \frac{1}{2}IJ$ و $IJ = \frac{1}{2}AB$، ومنه فإنّ $MN = \frac{1}{4}AB$. وبالتعويض نجد $MN = 1.5\,cm$.
أقياس زوايا المثلث AMN هي: $\widehat{MAN} = 55°$ و $\widehat{ANM} = 45°$ و $\widehat{AMN} = 80°$

7. E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة A تعني A منتصف [BE] F نظيرة النقطة E بالنسبة إلى النقطة D تعني D منتصف [EF]. (AD) مستقيم المنتصفين فهو يوازي (BF) و $AD = \frac{1}{2}BF$
وبما أنّ $AD = BC$ فإنّ C منتصف قطعة المستقيم [BF].



8. أ) بتطبيق نظريّة مستقيم المنتصفين في كلّ من المثلثين OAB و OBC نجد (AB) يوازي (LM) و(BC) يوازي (MN).
ومنه (LM) يوازي (MN). إذن النقط L ، M ، N في استقامية
ب) تكون النقطة M منتصف [LN]، عندما تكون النقطة B منتصف [AC]

إرشادات وتوجيهات

- مستقيم المنتصفين في مثلث يوازي حامل الضلع الثالث.
- توجد مستقيمات أخرى متوازية في الشكل ولكنها غير مرسومة. مثلا : (BE) و(HK).

- من المثلث ABD نستنتج أنّ (IL) يوازي (BD) ومن المثلث CBD نستنتج أنّ (JK) يوازي (BD)

- لاحظ أنّ (AI) = (JA) وأنّ (AI) يوازي نفسه.
- إذا كان لنقط الحامل نفسه نقول أنّها على استقامية.

- الزّاويتان AMN و ABC متماثلتان، وكذلك ANM و ACB.
- مجموع أقياس زوايا مثلث يساوي 180°.

- لدينا $MN = \frac{1}{2}BC$ و $LM = \frac{1}{2}AB$
ومنه إذا
$AB = BC$ فإنّ $LM = MN$

الإجابة صحيح.

المثلثات (4)

الكفاءات المستهدفة

• معرفة تناسبية الأطوال لأضلاع المثلثين المعينين بمستقيمين متوازيين يقطعهما قاطعان غير متوازيين واستعمالها.

مكتسبات

• التناسب، وحساب الرابع المتناسب.

ما يلزمك معرفته

1. المثلثان المعينان بمستقيمين متوازيين وقاطعين غير متوازيين.

مثال: المثلثان ABC و AMN معيّنان بمستقيمين متوازيين (D) و (D') وقاطعين غير متوازيين (AB) و (AC).

2. نظرية

في مثلث ABC، إذا كانت M نقطة من [AB]، و N نقطة من [AC]، وكان (MN) يوازي (BC)، فإن

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

أي: أطوال أضلاع المثلث AMN متناسبة مع أطوال أضلاع المثلث ABC.

والجدول الآتي هو جدول تناسبية:

أطوال أضلاع المثلث AMN	AM	AN	MN
أطوال أضلاع المثلث ABC	AB	AC	BC

التوظيف والتطبيق

يمكن استعمال النظرية السابقة في:
1- حساب أطوال بمعلومية أطوال مناسبة (انظر التمارين 1، 2، 3).
2- إثبات أنّ نقطة تقسم قطعة مستقيم بنسبة معلومة.

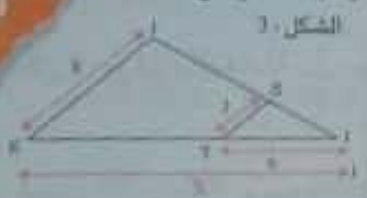
تمارين

1. 1) لاحظ الأشكال الآتية حيث الأطوال معبّرٌ عنها بالسنتيمتر

الشكل 1

الشكل 2

الشكل 3

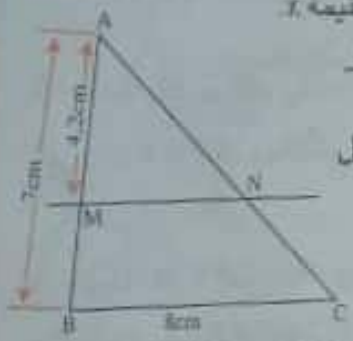


(ED)//(CB) (OP)//(LM) (ET)//(IK)

أرفق كلّ شكل بالمعادلة المناسبة مما يأتي، واحسب قيمة x.

$\frac{6}{x}=\frac{3}{8}$ $\quad\frac{x}{6}=\frac{3}{8}$ $\quad\frac{6-x}{6}=\frac{3}{8}$

2. إذا علمت أنّ في المثلث المرسوم في الشكل المقابل AB= 7 cm، و BC = 8cm، و AM= 4,2cm، وأنّ (AB)//(MN)، فاحسب الطول MN.



3. باستعمال معطيات التمرين السابق، وإذا علمت أنّ AC=10 cm، فاحسب كلاً من AN و NC.

4. ارسم مثلثا ABC أطوال أضلاعه AB = 6 CM، AC = 3 CM، BC = 4,5 CM. علّم النقطة D من [AC] بحيث AD = 2,5 × AC. المستقيم الذي يشمل النقطة D ويوازي (BC) يقطع [AB] في النقطة E. احسب أطوال أضلاع المثلث ADE.

5. تقسيم قطعة مستقيم [AB] إلى ثلاث قطع مستقيمة متجاورة ومتقايسة
– ارسم قطعة مستقيم [AB].
– ارسم نصف مستقيم [AX] حيث B لا تنتمي إليه.
وعلّم عليه تدريجا منتظما M_1، M_2، M_3...
– ارسم المستقيم (BM_3)، والمستقيمين الموازيين له اللذين يشملان النقطتين M_1، M_2 فيقطعان [AB] في النقطتين C، D على الترتيب. بيّن أن AC=CD=DB برسم المستقيم (BM_5)، والمستقيمات الموازية له التي تشمل النقط M_4، M_3، M_2، M_1.

ما هو عندئذ عدد القطع المتجاورة والمتقايسة التي قسمت إليها [AB]؟ أنجز شكلا مناسبا.

6. ارسم قطعة مستقيم [AB]، وقسّمها إلى 7 قطع مستقيمة متجاورة ومتقايسة، وعلّم عليها النقطة D حيث $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{7}$.

7. الصورة آثار لقلعة بني حمّاد بالمسيلة.
إذا علمت أن:
BC = 1,95 m، AB=3,4 m، BD = 30 m.
فاحسب ارتفاع القلعة (أعط الناتج مدوّرًا إلى 0,01).

صحيح أم خطأ؟

1) $\frac{x}{3}=\frac{5}{7}$ معناه $x=\frac{6\times 3}{7}$ ب) $\frac{x}{6}=\frac{3}{8}$ معناه $\frac{x}{6}=\frac{1}{8}$ ج) $\frac{6}{x}=\frac{3}{8}$ معناه $x=\frac{6\times 3}{8}$

حلول التمارين

1. الشكل 1 : يرفق بالمعادلة $\frac{3}{8}=\frac{x}{6}$، وفي هذه الحالة $x=\frac{6\times3}{8}=2,25$

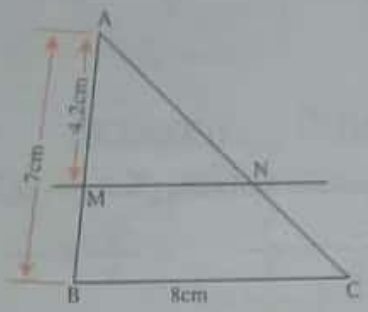
الشكل 2 : يرفق بالمعادلة $\frac{3}{8}=\frac{6-x}{6}$، وفي هذه الحالة $6-x=\frac{6\times3}{8}=2,25$

ومنه $x=3,75$.

الشكل 3 : يرفق بالمعادلة $\frac{3}{8}=\frac{6}{x}$، وفي هذه الحالة $x=\frac{6\times8}{3}=16$.

2. لدينا $\frac{MN}{8}=\frac{4,2}{7}$ ومنه $MN=\frac{4,2\times8}{7}=4,8$

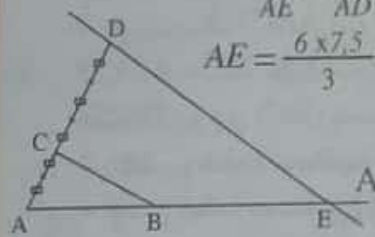
أي $MN=4,8$ cm



3. لدينا $\frac{AN}{10}=\frac{4,2}{7}$ ومنه $AN=\frac{4,2\times10}{7}=6$

أي : $AN=6$ cm وبالتالي فإنّ $NC=4$ cm.

4. لدينا $AD=2,5\times AC$ ومنه $AD=7,5$ cm في المثلث ADE، C نقطة من [AD]، وB نقطة من [AE] ، و(BC) يوازي (DE) فإنّ $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{ED}$

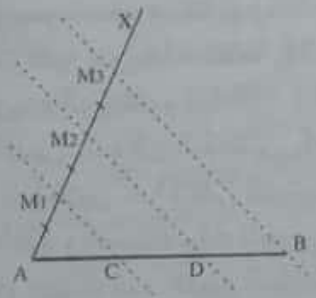


بالتعويض في $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$ نجد $\frac{6}{AE}=\frac{3}{7,5}$ ومنه $AE=\frac{6\times7,5}{3}=15$

وبالتعويض في $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{ED}$ نجد $\frac{3}{7,5}=\frac{4,5}{ED}$ أي أن $ED=\frac{4,5\times7,5}{3}=11,25$

ومنه أطوال أضلاع المثلث ADE هي $AD=7,5$ cm و $AE=15$ cm و $ED=11,25$

5. لدينا $\frac{AC}{AD}=\frac{AM_1}{AM_2}=\frac{1}{2}$ ومنه $AD=2AC$



$\frac{AC}{AB}=\frac{AM_1}{AM_3}=\frac{1}{3}$ ومنه $AB=3AC$ وبالتالي

فإن $AC=CD=DB$

برسم (BM_5) عدد القطع المتجاورة والمتقايسة التي قسّمت إليها [AB] هو 5 الشكل المناسب (انظر عمود إرشادات وتوجيهات).

6. برسم [AB] وتقسيمها إلى 7 قطع مستقيمة متجاورة ومتقايسة (انظر عمود إرشادات وتوجيهات). $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{7}$ تعني أن $AD=\frac{3}{7}AB$

7. لدينا $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$ ومنه $\frac{3,4}{33,4}=\frac{1,95}{DE}$ نجد $DE=\frac{33,4\times1,95}{3,4}=19,1558$

وبالتالي فإنّ ارتفاع القلعة يساوي $DE=19,16$ cm.

الإجابة أ) صحيح ب) صحيح

إرشادات وتوجيهات

إذا كان في مثلث ABC، M نقطة من [AB] ، وN نقطة من [AC]، وكان (MN) يوازي (BC)، فإنّ:

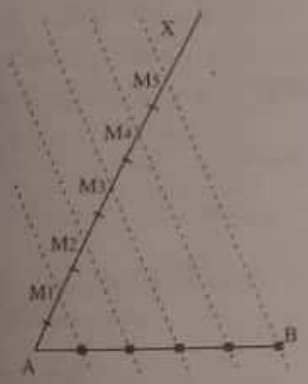
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

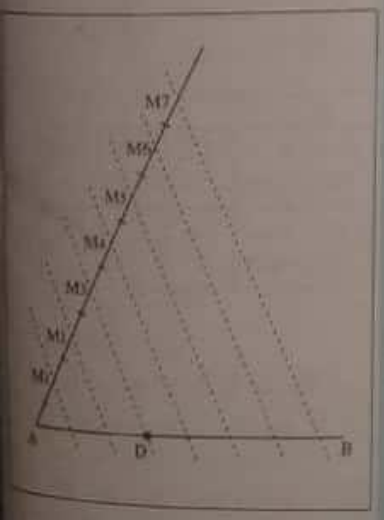
في التمرينين 2 و3 لدينا :

$$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$$

لاحظ أنّ في المثلث AED، B نقطة من [AE]، وC نقطة من [AD] و(BC) يوازي(ED).

يمكن حساب ED بالتعويض في التناسب : $\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{ED}$





33 المثلثات (5)

الكفاءات المستهدفة

- تعيين وإنشاء المستقيمات الخاصة في المثلث (المحاور، الارتفاعات).
- معرفة خواص هذه المستقيمات واستعمالها في وضعيات بسيطة.

مكتسبات

- خواص محور قطعة مستقيم ومنصف زاوية.

ما يلزمك معرفته

1) محاور أضلاع مثلث

محور ضلع في مثلث هو محور قطعة المستقيم التي تكوّن هذا الضلع.

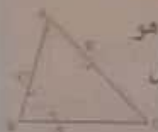
مثال : كلّ من (D) ، (D_1) ، (D_2) محور في المثلث ABC

- محاور أضلاع مثلث متقاطعة في نقطة واحدة.

- نقطة تلاقي محاور أضلاع مثلث هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث.

- نقطة تلاقي محاور أضلاع مثلث متقرح الزاوية تقع خارجه.

2) ارتفاعات في مثلث



- الارتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد الضلع المقابل له.

مثال : كلّ من (CC')، (BB')، (AA') ارتفاع في المثلث ABC.

- ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة.
- مساحة المثلث ABC

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} AA' \times BC$$
$$= \frac{1}{2} BB' \times AC$$
$$= \frac{1}{2} CC' \times AB$$

تمارين

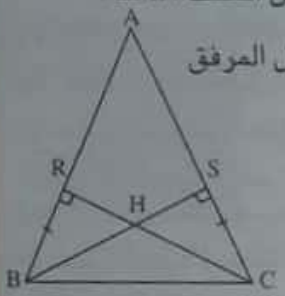
1. أنشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه $AB = 9cm$ ، $AC = 8cm$ ، $BC = 7cm$ ، ثمّ أنشئ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

2. أنشئ مثلثا RST أطوال أضلاعه $RS=8cm$ ، $RT=6cm$ ، $ST=3cm$، ثمّ أنشئ الدائرة المحيطة بالمثلث RST.

3. أنشئ مثلثا LMN حيث $MN=7cm$ ، $\widehat{MNL}=25°$ ، $\widehat{NML}=110°$ ،

ثمّ أنشئ نقطة تلاقي ارتفاعاته H هل النقطة H تقع داخل المثلث LMN ؟

4. أجب عمّا يأتي باستعمال المعطيات المبيّنة في الشكل المرفق



أ) ماذا تمثل النقطة H بالنسبة إلى المثلث ABC ؟

ب) أثبت أنّ المثلثين BRC و CSB متقايسان.

ج) أثبت أنّ المثلث ABC متساوي الساقين.

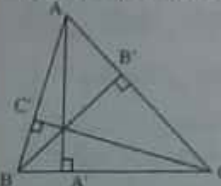
د) استنتج وضع المستقيم (AH) بالنسبة إلى المثلث ABC.

5. ارسم مثلثا ABC قائم في A ، وأنشئ الدائرة المحيطة به (C).

أ)أثبت أنّ النقطة O مركز الدائرة (C) ينتمي إلى [BC] وتر المثلث.

ب) استنتج أنّ $OA = OB = OC$.

6. ارسم مثلثا ABC (زواياه حادة)، وارسم ارتفاعاته CC' ، BB' ، AA'. ارسم المستقيم الذي يشمل الرأس A ويوازي (BC) ، والمستقيم الذي يشمل الرأس B ويوازي (AC)، والمستقيم الذي يشمل الرأس C ويوازي (AB)، فتتقاطع هذه المستقيمات مثنى مثنى في النقط E ، D ، F. ماذا تمثل المستقيمات (CC') ، (BB')، (AA') في المثلث EDF ؟ برر جوابك.



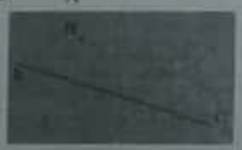
7. ABC، مثلث، و H نقطة تلاقي ارتفاعاته CC' ، BB' ، AA'.

أ) ما هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ACH ؟

ب) ما هو المثلث الذي نقطة تلاقي ارتفاعاته هي النقطة C ؟

ج) ما هو المثلث الذي نقطة تلاقي ارتفاعاته هي النقطة A ؟

8. انقل الشكل المرفق، وأنشئ المثلث ABC بحيث تكون النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعاته.اشرح الطريقة المتبعة ؟

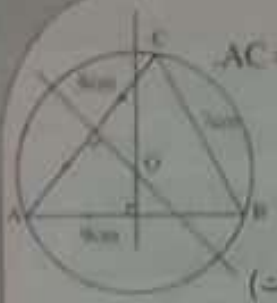


9. الشكل يمثل قوسا من دائرة مُسح جزء منها، لإكمال رسم هذه الدائرة ابدأ بتعيين مركزها، واشرح الطريقة التي استعملتها.

صحيح أم خطأ ؟ نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث هي دائما داخل هذا المثلث.

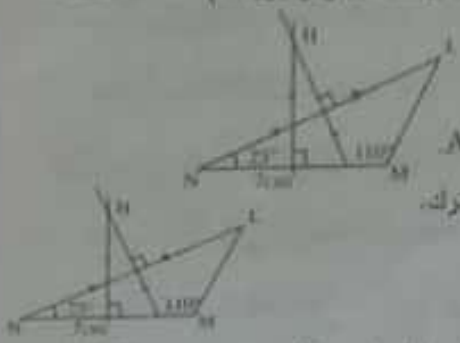
أسئلة للتمارين

1. ننشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه $AB = 9\ cm$ ، $AC = 8\ cm$ ، $BC = 7cm$. ثم ننشئ محوري ضلعين منه. ثم نرسم الدائرة التي مركزها نقطة تقاطع المحورين وتشمل النقطة A فتكون هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.



2. ننشئ بنفس الطريقة السابقة (انظر الحل في عمود إرشادات وتوجيهات)

3. ننشئ بطريقة مماثلة لطريقة حل التمرين 1



نقطة تلاقي الارتفاعات H تقع خارج المثلث LMN

4. أ) النقطة H هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ABC.

ب) المثلثان القائمان BRC و CSB فيهما [BC] مشترك.

و $BR = CS$ (انظر الشكل المعطى). فيهما متقايسان

ج) نستنتج من تقايس المثلثين BRC و CSB أن $\widehat{RBC} = \widehat{SCB}$. ومنه المثلث ABC متساوي الساقين وراسه الأساسي A. د) المستقيم (AH) هو ارتفاع ومحور ومتوسط متعلق بالضلع [BC] ومنصف زاوية الرأس A في المثلث ABC.

5. حسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المنتصفين :

- محور [AC] لأنه يشمل منتصف [AC] ويوازي (AB) فهو يشمل منتصف [BC].

- محور [AB] لأنه يشمل منتصف [AB] ويوازي (AC) فهو يشمل منتصف [BC]. ومنه فإن المحورين يتقاطعان في منتصف [BC] وبالتالي فإن النقطة O مركز الدائرة (C) ينتمي إلى [BC] نستنتج مما سبق أن $OA = OA = OB$ (كل منها نصف قطر الدائرة (C)).

6. المستقيمات (AA')، (BB')، (CC') هي محاور المثلث EDF، لأن :

- كل من ABCD و AEBC هو متوازي أضلاع وبالتالي فإن $EA = AD = BC$

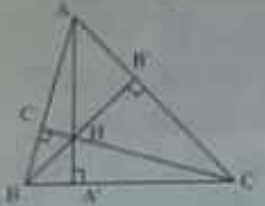
- (AA') عمودي على (ED) لأنه عمودي على الموازي له (BC).

ومنه فإن (AA') محور [ED]. وبنفس الطريقة نبين المحورين الآخرين (BB') و (CC').

7. أ) نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ACH هي النقطة B.

ب) المثلث الذي نقطة تلاقي ارتفاعاته هي النقطة C هو ABH.

ج) المثلث الذي نقطة تلاقي ارتفاعاته هي النقطة A هو BCH.



8. نرسم (D) العمودي على [BC] الذي يشمل H.

- نرسم (BH)، ثم (D') العمودي على (BH) الذي يشمل النقطة C.

يتقاطع (D) و (D') في النقطة A. نكمل رسم المثلث ABC.

9. نعلم ثلاث نقط متمايزة A، B، C من هذه القوس، ثم نعين نقطة تلاقي محاور المثلث ABC، فهي مركز الدائرة المحيطة به (أي الدائرة المطلوبة)، ثم نكمل الرسم (انظر عمود إرشادات وتوجيهات)

إرشادات وتوجيهات

- يكفي رسم محورين في مثلث نقطة تقاطعهما هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث.

- نقطة تلاقي محاور أضلاع مثلث منفرج الزاوية تقع خارجه

- في المثلث متساوي الساقين الارتفاع المتعلق بالرأس الأساسي هو منصف زاوية هذا الرأس، والمحور المتعلق بالضلع المقابل لها، والمتوسط.

- محور [AC] يوازي (AB) لأن كلا منهما عمودي على (AC)

- محور [AB] يوازي (AC) لأن كلا منهما عمودي على (AB)

- نقطة تلاقي محاور أضلاع مثلث منفرج الزاوية تقع خارجه

الكفاءات المستهدفة

- تعيين وانشاء المستقيمات الخاصة في المثلث (المتوسطات، المنصفات.)
- معرفة خواص هذه المستقيمات واستعمالها في وضعيات بسيطة.

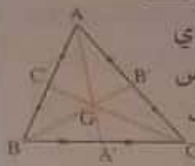
مكتسبات

- خواص محور قطعة مستقيم، ومنصف زاوية

ما يلزمك معرفته

1. المتوسطات في مثلث

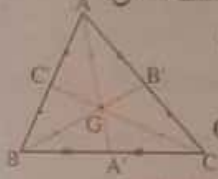
- المتوسّط في مثلّث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلّث ومنتصف الضلع المقابل.



مثال: كلّ من (AA') ، (BB') ، (CC) متوسط في المثلث ABC.

- المتوسّطات في مثلّث متقاطعة في نقطة واحدة.
- نقطة تلاقي المتوسّطات في مثلّث هي هي مركز ثقل هذا المثلث
- طريقة تلاقي المتوسّطات

المنتصف في مثلّث تحقق:



$GA' = \frac{1}{3}AA'$

$GB' = \frac{1}{3}BB'$

$GC' = \frac{1}{3}CC'$

2. منصفات زوايا مثلث

المنصف

في مثلّث هو منصف إحدى زواياه.

مثال ([AA']): هو منصّف زاوية الرأس A في المثلث ABC.

- منصّفات زوايا مثلّث متقاطعة في نقطة واحدة.
- نقطة تلاقي منصّفات زوايا مثلث هي مركز الدائرة المرسومة داخله (أي التي تمسّ أضلاع المثلّث من الداخل .)

صحيح أم خطأ ؟

نقطة تلاقي منصّفات زوايا مثلث هي دائما داخل هذا المثلث.

تمارين

1. ABCD متوازي أضلاع مركز O ، النّقطتان E و F منتصفا الضلعين [BC] و[AD] على التّرتيب .

أ) ماذا تمثل النّقطة G بالنّسبة إلى المثلث ABC ؟

ب) ماذا تمثل النّقطة H بالنّسبة إلى المثلث ACD ؟

جـ)أثبت أنّ النقطتين G و H تقسمان [BD] إلى ثلاث قطع متقايسة .

2. ABC مثلث كيفي، M منتصف [AB] ، المستقيم الموازي (BC) الذي يشمل النّقطة M يقطع [AC] في النّقطة N. [BN] و[CM] متقاطعان في النّقطة G.

أثبت أنّ المستقيم (AG) يشمل منتصف [BC].

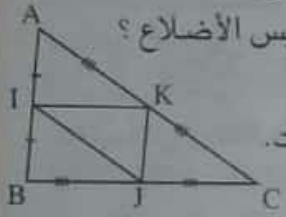
3. علّم ثلاث نقط G ، B ، A ليست في استقامية. نشئ النّقطة C بحيث تكون النّقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC (أي : نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC)

4. ارسم مثلثا ABC كيفيا، وأنشئ مركز ثقله G، ونقطة تلاقي ارتفاعاته H، ومركز الدائرة المحيطة به O.

أ) تحقّق باستعمال مسطرة أن النّقط O ، H ، G تنتمي إلى نفس المستقيم.

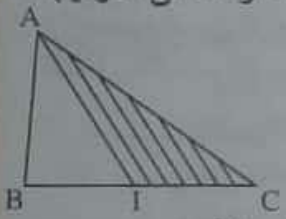
(يسمى مستقيم أو لر نسبة إلى العالم الرياضي السويسري (Euler Leonhard))

ب) كيف تصبح النّقط O ، H ، G في حالة المثلث ABC متقايس الأضلاع ؟



5. في الشكل المرفق النّقط I ، J ، K منتصفات أضلاع المثلث ABC أثبت أنّ للمثلثين ABC و IJK نفس المتوسّطات.

6. أنشئ المثلث ABC حيث $AB = 5\ cm$ و $AC = 7\ cm$ و $\widehat{BAC} = 70°$، منصفا الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ACB}$ متقاطعان في النّقطة I، المستقيم الموازي (BC) والذي يشمل النّقطة I يقطع [AB] و [AC] في M و N على التّرتيب .



أ) بيّن أنّ كلاً من المثلثين CIN و BIM متساوي السّاقين.

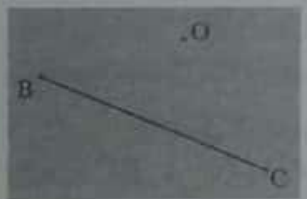
ب) احسب محيط المثلث AMN.

ج) احسب قيس الزّاوية $\widehat{BIC}$.

7. ABC مثلث قائم في A ، I مركز الدّائرة (C) المرسومة داخله، الدّائرة (C) تمس [AB] و[AC] في النقطتين M و N على التّرتيب.

أ) أثبت أنّ الرّباعيّ AMIN مربّع.

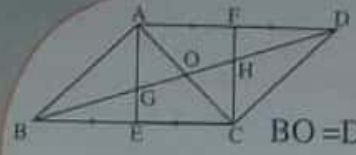
ب) احسب قيس الزّاوية $\widehat{BIC}$.



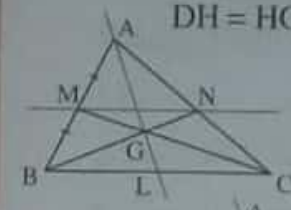
8. ABC مثلث، (AI) المتوسّط المتعلّق بالضلع [BC]. برهن على أن للمثلثين AIC و AIB نفس المساحة.

9. [AB] قطعة مستقيم معطاة، و O نقطة لا تنتمي إلى (AB)، أنشئ النّقطة A بحيث تكون النّقطة O مركز الدّائرة المرسومة داخل المثلث ABC.

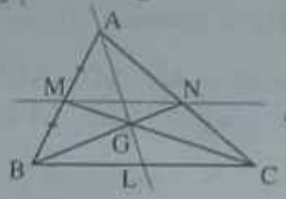
حلول التمارين



1. أ) النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC.
ب) النقطة H هي مركز ثقل المثلث ACD.
ج) بما أن $BO = DO$ و $GO = \frac{1}{3}DO$ و $HO = \frac{1}{3}BO$ فإن $HO = GO$ و $HG = BO$.
ولدينا $BG = \frac{2}{3}BO$ و $DH = \frac{2}{3}DO = \frac{2}{3}BO$ ومنه $DH = HG = GB$

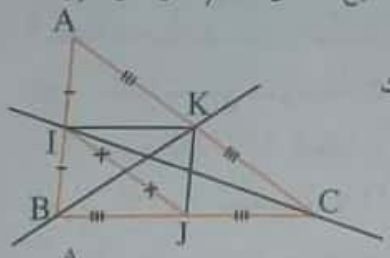


2. حسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المنتصفين فإن N منتصف [AC]. كلّ من المستقيمين (CM) و(BN) متوسطان ويتقاطعان في النقطة G وبما أنّ المتوسطات في مثلث تتقاطع في نقطة واحدة فإنّ المستقيم (AG) متوسّط متعلق بالضلع [BC] فهو يشمل منتصفه.

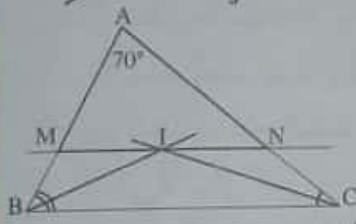


3. ننشئ النقطة M منتصف القطعة [AB]، ثم نرسم نصف المستقيم [MG)، نعلّم عليه النقطة C بحيث $GC = 2MG$.
ونكمل رسم المثلث ABC

4. في حالة المثلث ABC متقايس الأضلاع فإنّ النقط G، H، O تصبح نقطة واحدة (انظر عمود الإرشادات).

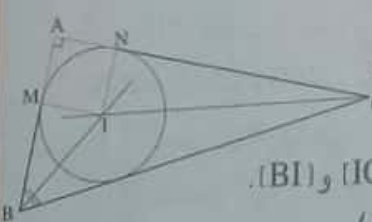


5. في المثلث ABC، (BK) هو المتوسط المتعلق بالضلع [AC] وهو أيضا المتوسط المتعلق بالضلع [IJ] في المثلث IJK لأنّ الرباعي IBJK متوازي أضلاع وقطراه متناصفان.
بنفس الطريقة نبين أنّ (CI) هو المتوسط المتعلق بالضلع [AB] في المثلث ABC بالضلع [JK] في المثلث IJK.
وكذلك بالنسبة إلى (AJ). إذن المثلثين ABC و IJK المتوسطات نفسها



6. أ) بما أنّ المستقيم (MN) يوازي (BC) و(IC) قاطع لهما فإنّ الزاويتين $\widehat{CIN}$ و $\widehat{ICB}$ متقايستان وبما أنّ الزاويتين $\widehat{NCI}$ و $\widehat{ICB}$ متقايستان فإنّ الزاويتين $\widehat{NCI}$ و $\widehat{CIN}$ متقايستان، ومنه المثلث CIN متساوي الساقين. وكذلك الزاويتان $\widehat{MBI}$ و $\widehat{MIB}$ متقايستين ومنه المثلث BIM متساوي الساقين
ب) بما أنّ المثلث CIN متساوي الساقين فإنّ $NC = NI$ وكذلك $MB = MI$ ومنه محيط المثلث AMN يساوي $(AB + AC)$ أي 13 cm.
ج) مجموع قيسي الزاويتين ABC و ACB في المثلث ABC هو $110°$ ومنه مجموع قيسي الزاويتين $\widehat{MIB}$ و $\widehat{CIN}$ هو $55°$ وبالتالي قيس الزاوية $\widehat{BIC}$ هو $125°$ (أي $180° - 55°$).

7. أ) بما أنّ كلاً من [IN] و[IM] نصف قطر في الدائرة (C) و(AN) عمودي على (AM) فإن [IN] عمودي على (AN) و(AM)//(IN)، وكذلك [IM] عمودي على (AM) و(AN)//(IM)، فإن الرباعي AMIN مربّع.



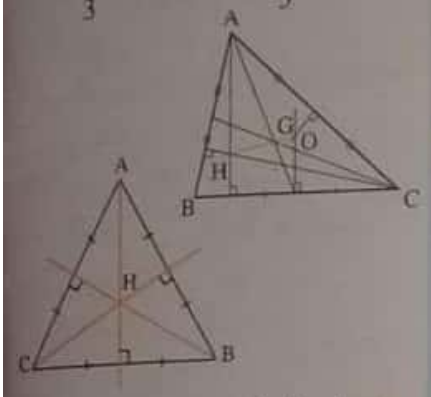
8. بما أنّ (AI) المتوسّط المتعلّق بالضلع [BC] فإنّ $IB = IC$ وللمثلثين AIC و AIB الارتفاع نفسه 'AA المتعلق بالضلعين [IC] و [BI].
ومنه فإنه لهما المساحة نفسها (انظر الشكل في عمود الإرشادات).

9. نرسم [BO)، ثمّ [BX) نظير [BC) بالنّسبة إلى [BO). نرسم الدائرة (C) التي قطرها [OC] فتقطع [BC] في النّقطة 'A، نرسم الدائرة التي مركزها O وتشمل 'A تقطع (C) في نقطة أخرى 'B. نرسم ['CB) فيقطع [BX) في النقطة A. نكمل رسم المثلث ABC.
(الشكل في عمود الإرشادات)

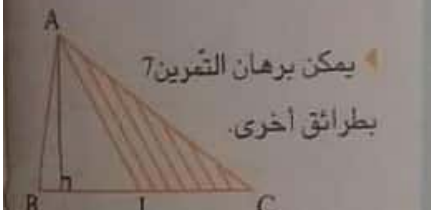
إرشادات وتوجيهات

- قطرا متوازي أضلاع متناصفين.
- G نقطة تلاقي متوسّطات المثلث ABC.
- H نقطة تلاقي متوسّطات المثلث ACD.
- يمكن برهان الجزء ج) من التمرين1 بطرائق مختلفة مثل استعمال متوازي الأضلاع AFCE، ومستقيم المتنصفين في كلّ من المثلثين BCH و DAG

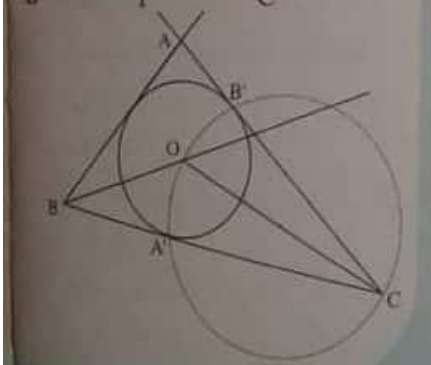
- $MG = \frac{1}{3}MC$ ، $GC = \frac{2}{3}MC$



- في المثلث المتقايس الأضلاع محور ضلع هو نفسه المتوسّط والارتفاع المتعلّق بهذا الضلع



- يمكن برهان التّمرين7 بطرائق أخرى.



الإجابة صحيح.

35 المثلث القائم والدائرة

الكفاءات المستهدفة

- معرفة خاصية الدائرة المحيطة بالمثلث القائم واستعمالها.
- معرفة خاصية المتوسط المتعلق بالوتر في مثلث قائم واستعمالها.

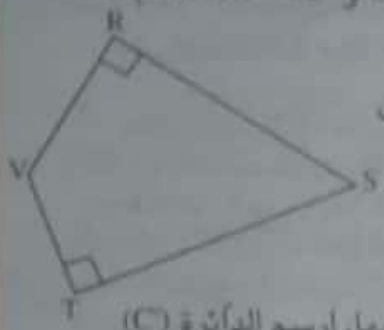
تمارين

1. ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A. النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة A.
– أثبت أن المثلث BCD قائم في C.

2. ABC مثلث كيفي. (BB') و (CC') الارتفاعان المتعلقان بالضلعين [AC] و[AB] ويقطعانهما في النقطتين B' و C' على الترتيب.
– أثبت أن النقط B و C و B' و C' تنتمي إلى نفس الدائرة. يطلب رسمها (نقول أن الرباعي BCB'C' دائري).

3. أنشئ مثلثا FGH فيه FH = 7cm و $\widehat{GFH} = 35°$ و $\widehat{FHG} = 55°$ علم النقطة I منتصف [FH]. واحسب الطول GI.

4. برهن باستعمال التشفير المبين على الرسم على أن الرباعي RSTV هو رباعي دائري (أي رؤوسه تنتمي إلى نفس الدائرة) وارسم هذه الدائرة التي تشمل رؤوسه.

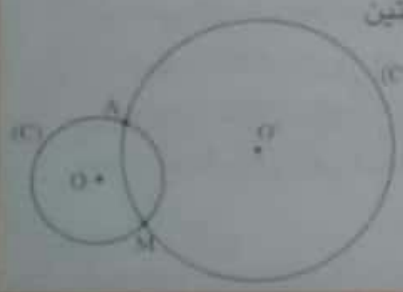


5. ارسم دائرة (C) مركزها O، وعلم نقطة A خارجها. ارسم الدائرة (C') التي قطرها [OA]. سم E، F نقطتي تقاطع الدائرتين (C) و(C').
أ) أثبت أن كلا من المثلثين AOE و AOF قائم.
ب) استنتج وضع كل من المستقيمين (AE) و(AF) بالنسبة إلى الدائرة (C).

6. ارسم مثلثا كيفيا ABC، والدائرة التي قطرها [BC]، فتقطع [AB] و[AC] في النقطتين M و N على الترتيب القطعتان [BN] و[CM] تتقاطعان في النقطة H.
برهن على أن المستقيم (AH) عمودي على (BC).

7. علم ثلاث نقط A و B و B' في استقامية بهذا الترتيب. ارسم الدائرة بين (C) و(C') اللتين قطراهما [AB] و[AB'] على الترتيب، (Δ) مستقيم يشمل النقطة A ويقطع (C) و(C') في النقطتين D و D' على الترتيب.
أ) أثبت أن المستقيمين (BD) و(B'D') متوازيان.
ب) هل يبقى (BD) // (B'D') في حالة النقطة A بين B و B' ؟

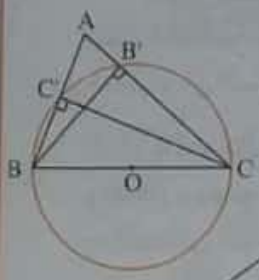
8. ارسم دائرتين (C) و (C') متقاطعتين في النقطتين A و M كما في الشكل المرفق أنشئ النقطة B من (C) المقابلة قطريا للنقطة A، والنقطة C من (C') المقابلة قطريا للنقطة A. أثبت أن النقط B و M و C في استقامية.



حلول التمارين

1. لدينا AB=AC من المعطيات، وكذلك AB=AD، ومنه AB=AC=AD، وبالتالي فإن A هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث BCD. وبما أن A تنتمي إلى [BD] فإنّ المثلث BCD قائم في C.

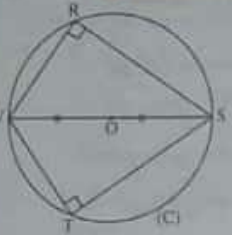
2. لدينا المثلث BB'C قائم في B'، ومنه فالدائرة المحيطة به (C) مركزها منتصف وتره [BC]. لدينا المثلث BC'C قائم في C'، ومنه فالدائرة المحيطة به (C') مركزها منتصف وتره [BC]. بما أن للدائرتين (C) و(C') نفس المركز ونفس القطر BC فهما متطابقتان وبالتالي فإنّ النقط B و C و B' و C' تنتمي إلى نفس الدائرة.



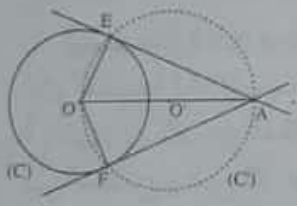
3. الإنشاء يتم باستعمال مسطرة مدرجة ومنقلة.

لدينا $\widehat{FGH}+55^\circ+35^\circ=180^\circ$ ومنه $\widehat{FGH}=90^\circ$

وبالتالي فإنّ $IG=IF=IH=3{,}5\ cm$

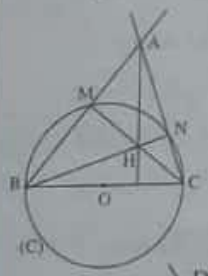


4. بما أن المثلث VRS قائم في R، ومنه فالدائرة المحيطة به (C) مركزها منتصف وتره [VS]. بما أن المثلث VTS قائم في T ومنه فالدائرة المحيطة به (C) مركزها منتصف وتره [VS]. للدائرتين (C) و (C') نفس المركز ونفس القطر VS فهما متطابقتان، ومنه الرباعي RSTV هو رباعي دائري.

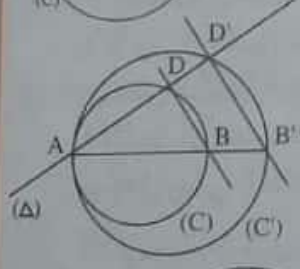


5. أ) بما أن الدائرة (C) محيطة بالمثلث AOE ومركزها O' هو منتصف أحد أضلاعه [OA]، فإنّ المثلث AOE قائم في E. بنفس الطريقة نبيّن أنّ المثلث AOF قائم في F.

ب) نستنتج أنّ كلاً من المستقيمين (AE) و(AF) مشترك مع الدائرة (C) في نقطة واحدة.

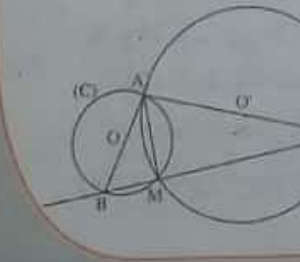


6. الدائرة المحيطة بالمثلث BMC مركزها منتصف [BC]، ومنه المثلث BMC قائم في M. نفس الدائرة محيطة بالمثلث BNC، ومنه المثلث BNC قائم في N. ومنه النقطة H هي تقاطع الارتفاعين (BN) و(CM) في المثلث ABC. وبما أنّ ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة، فان المستقيم (AH) عمودي على (BC).



7. أ) المثلث ABD مرسوم في نصف دائرة قطرها [AB]، فهو قائم في D. وكذلك المثلث AB'D' مرسوم في نصف دائرة قطرها [AB]، فهو قائم في D'. ومنه المستقيمان (BD) و(B'D') عموديان على نفس المستقيم (Δ)، فهما متوازيان.

ب) في حالة النقطة A بين B و B' يبقى (BD) // (B'D') والإثبات يتم بنفس الطريقة (انظر الشكل في عمود ارشادات وتوجيهات)



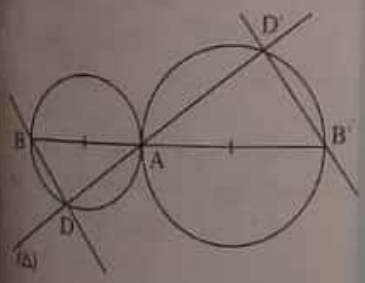
8. المثلث AMC قائم في M، المثلث AMB قائم في M، ومنه $\widehat{BMC}=\widehat{BMA}+\widehat{AMC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

ومنه النقط B و M و C في استقامية.

الإجابة صحيح.

إرشادات وتوجيهات

- النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة A تعني أنّ:
  AB=AD و A تنتمي إلى [BD]
- الرباعي BCB'C دائري لأنّ رؤوسه B و C و B' و C' تنتمي إلى نفس الدائرة.
- النقطة I هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث FGH.
- إذا اشترك مستقيم ودائرة في نقطة واحدة نقول أنّ هذا المستقيم مماس لهذه الدائرة.
- في التمرين 6 نستغلّ وحدانية نقطة تلاقي الارتفاعات في مثلث.
- نقول إن مثلثا مرسومها في نصف دائرة إذا كان منتصف أحد أضلاع هذا مثلث مركزا للدائرة المحيطة به.



الكفاءات المستهدفة

* معرفة خاصية فيثاغورس، واستعمالها.

مكتسبات

* مربّع عدد.
* إنشاء مثلّث بمعلومية بعض عناصره.

ما يلزمك معرفته

1) خاصية فيثاغورس

النظرية

إذا كان مثلّث قائما، فإنّ مربّع طول وتره يساوي مجموع مربّعي طولي ضلعيه القائمين.

مثال: بما أن ABC مثلّث قائم في A فإنّ:

$a^2 = b^2 + c^2$

النظرية العكسية

إذا كان في مثلّث مربّع طول أكبر أضلاعه يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين، فإنّ هذا المثلّث قائم في الرأس المقابلة لأطول ضلع في هذا المثلّث.

مثال

بما أن $BC^2 = 25$

و $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$

أي: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

فإنّ المثلّث ABC قائم في A.

النظرية العكسية

* لإثبات أنّ مثلثا غير قائم، يمكن التحقق من أنّ مربع طول أكبر أضلاعه لايساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.
* اللمسة ✓ تمكّن من إيجاد عدد (أوقيمة مقربة) علم مربعه.

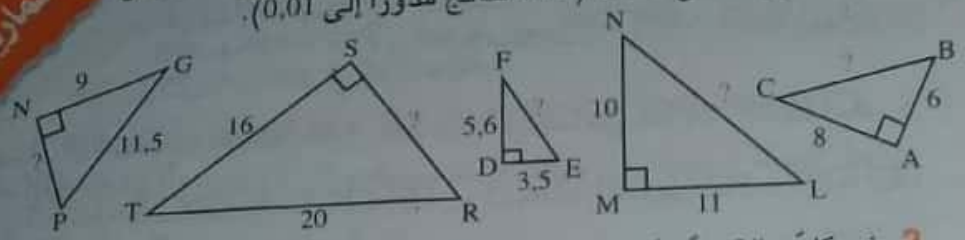
مثال: لحساب العدد الذي مربّعه 81 ندخل في الحاسبة أحد البرنامجين حسب الآلة:

81 ✓ أو = 81 ✓ ENTER

فيظهر على شاشتها العدد 9.

تمارين

1. علما أنّ كلّ مثلّث مما يأتي قائم، وأنّ وحدة الطّول هي السنتيمتر. احسب طول الضلع الثالث (أعط الناتج مدورا إلى 0,01).



2. في كلّ حالة مما يأتي نعطي أطوال أضلاع مثلّث بالسنتيمتر، والمطلوب منك تحديد فيما إذا كان المثلث قائما، وفي حالة الجواب بنعم، حدّد الزاوية القائمة.

أ) $AB = 24$ و $BC = 10$ و $CA = 26$

ب) $EF = 6$ و $FG = 17,5$ و $GE = 18,5$

ج) $RS = 6$ و $ST = 5,5$ و $TR = 8,2$

3. أ) إذا علمت أنّ $EF^2 = GE^2 + GF^2$ فما طبيعة المثلّث EFG؟

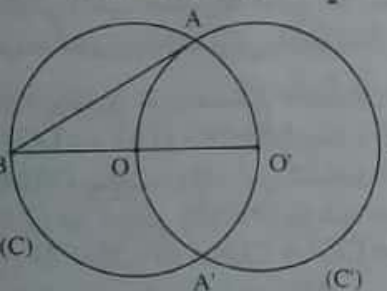
ب) إذا علمت أنّ RST مثلّث قائم في R، فاكتب مربّعا طول وتره بدلالة طولي الضلعين القائمين.

4. ABC مثلّث قائم ومتساوي السّاقين رأسه الأساسي A، فيه $AB = 3$ cm.

أ) احسب BC (أعط النّاتج مدوّرا إلى 0,01).

ب) أنشئ الشكل بدقّة.

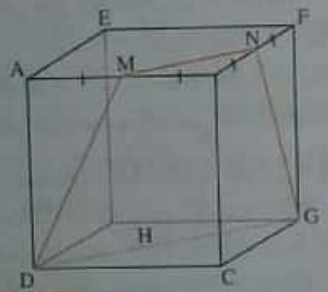
5. (C) و(C') دائرتان نصف قطر كلّ منهما 3,5 cm متقاطعتان في النقطتين A و A'، النقطتان B و O' متقابلتان قطريا. احسب القيمة المضبوطة للطّول BA، ثمّ القيمة المقرّبة بالنّقصان إلى 0,01.



6. ABCDEFGH مكعّب طول حرفه 5 cm، النّقطتان M و N منتصفا حرفيه [AB] و[BF].

أ) ما طبيعة الرّباعيّ DGNM؟

ب) احسب محيط هذا الرّباعيّ.



7. (C) و (C') دائرتان لهما نفس المركز O ونصفا قطريهما 29 mm و 21 mm على الترتيب، [AB] وتر في (C) يمسّ (C') في النقطة A.

أ) احسب الطّول AB.

ب) احسب مساحة الحيّز الملوّن، وقارنه بمساحة القرص الّذي قطره AB.

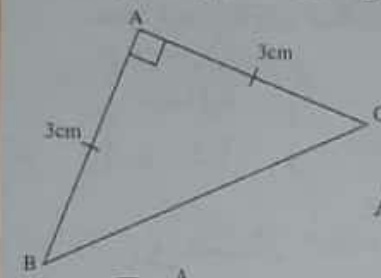
أصحيح أم خطأ؟ A و B و C ثلاث نقط متمايزة إن $(AB+AC)^2 = AB^2 + AC^2$

حلول التمارين

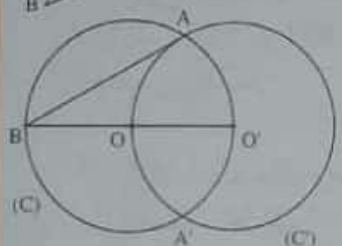
1. $BC^2 = AB^2 + CA^2 = 64+36 = 100$ ومنه $BC = 10$ cm
$NL^2 = MN^2 + ML^2 = 100+121 = 221$ ومنه $BC = 14,87$ cm
$FE^2 = DF^2 + DE^2 = 31,36+12,25 = 43,61$ ومنه $BC = 6,6$ cm
$RT^2 = RS^2 + ST^2$ وبالتعويض نجد $400 = SR^2 + 256$ ومنه $SR = 12$ cm أي $RS^2 = 144$
$PG^2 = NP^2 + NG^2$ وبالتعويض نجد $132,25 = NP^2 + 81$ ومنه $NP = 7,16$ أي $NP^2 = 51,25$

2. 1) بما أنّ $AB^2 + BC^2 = 576 + 100 = 676$ و $CA^2 = 676$ فإنّ $CA^2 = AB^2 + BC^2$ والمثلث ABC قائم في B.
ب) بما أنّ $FE^2 + FG^2 = 36 + 306,25 = 342,25$ و $GE^2 = 324,25$ فإنّ $GE^2 = EF^2 + FG^2$ والمثلث EFG قائم في F.
ج) بما أنّ $RS^2 + ST^2 = 36 + 30,25 = 66,25$ و $TR^2 = 67,24$ فإنّ $TR^2 \neq RS^2 + ST^2$ والمثلث RST ليس قائما.

3. 1) بما أنّ $EF^2 = GE^2 + GF^2$ فالمثلث EFG قائم في G.
ب) بما أنّ المثلث RST قائم في R، فإن $ST^2 = RS^2 + RT^2$

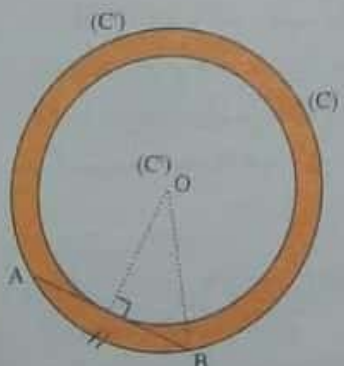


4. 1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 9 = 18$ ومنه $BC = 4,24$ cm
ب) نرسم [AB] حيث $AB = 3$ cm نرسم نصف مستقيم يشمل A وعمودي على [AB]، ونعلّم عليه النقطة C حيث $AC = 3$ cm، ونكمل رسم المثلث ABC.



5. المثلث ABO' قائم في A لأنّه مرسوم في نصف الدائرة (C).
ولدينا $AO' = 3,5$ cm و $BO' = 7$ cm. $BO'^2 = AB^2 + AO'^2$
وبالتعويض نجد $49 = AB^2 + 12,25$ ومنه $AB^2 = 36,75$
وبالتالي فالقيمة المضبوطة للطول AB تساوي $\sqrt{56,75}$ cm
وقيمته المقربة بالنقصان إلى 0,01 تساوي 6,06 cm.

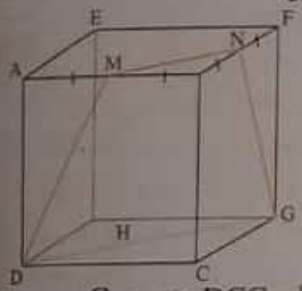
6. 1) بتطبيق نظرية مستقيم المنتصفين في المثلث ABF نجد (AF) // (MN) و $AF = 2\,MN$
و (DG) // (AF) و $AF = DG$ ومنه (DG) // (MN) و $DG = 2MN$... (1) المثلثان GFN و DAM متقايسان (تساوي الضلعين القائمين من أحدهما مع الآخر) ومنه $GN = DM$ (2) من (1) و (2) فإنّ الرباعي DGNM هو شبه منحرف متساوي الساقين.
ب) $DG^2 = CG^2 + CD^2 = 25 + 25 = 50$ ومنه $DG = 7,07$ cm
وبالتالي فإنّ $MN = 3,54$ cm
$NG^2 = FG^2 + FN^2 = 25 + 6,25 = 31,25$ ومنه $MD = NG = 5,59$ cm
إنّ $7,07 + 3,54 + 2 \times 5,59 = 21,61$؛
وبالتالي فإنّ محيط الرابعي DGNM يساوي 21,61 cm.



7. 1) حساب: AB لدينا $AB = 2\,HB$ انظر عمود الإرشادات)
المثلث OHB قائم في H ومنه $OB^2 = HO^2 + HB^2$
وبالتعويض نجد $814 = 441 + HB^2$ ومنه $HB^2 = 400$
أي $HB = 20$ ومنه $AB = 40$ mm
ب) $A = 29^2 \times 3,14 - 21^2 \times 3,14$
$= (29^2 \times -21^2) \times 3,14 = (841 \times -441) \times 3,14$
$= (400) \times 3,14 = 1256$
ومنه مساحة الحيز الملوّن تساوي: 1256 mm^2
مساحة القرص الذي قطره AB تساوي $20^2 \times 3,14 = 1256$ mm^2
وبالتالي فمساحة الحيز الملوّن تساوي مساحة القرص الذي قطره AB.

إرشادات وتوجيهات

- أطول ضلع في المثلث القائم هو وتره.
- لو كان المثلث RST قائما لكان وتره GE أي أطول ضلع فيه.
- المساواة $EF^2 = GE^2 + GF^2$ في المثلث EFG تعني أن [EF] وتر المثلث و[GE]، [GF] الضلعان القائمان.
- نقرأ العدد $\sqrt{36,57}$ الجذر التربيعي للعدد 36,75 وهو العدد الذي مربعه يساوي 36,75، ويمكن حساب باستعمال اللمسة $\sqrt{\ }$ في الحاسبة.
- في التمرين 6 الرباعي AFGD مستطيل.



- المثلث DCG قائم في C ومنه $DG^2 = CG^2 + CD^2$
- المثلث FGN قائم في F ومنه $NG^2 = FG^2 + FN^2$
- في التمرين 7 المثلث OAB متساوي الساقين، ومنه (OH) عمود ومتوسط ومحور ومنصف.
- مساحة القرص تساوي جداء مربع نصف قطره والعدد π (3,14)
- مساحة الحيّز الملوّن تساوي مساحة القرص (C) ناقص مساحة القرص (C').

الإجابة خطأ. يمكنك التأكد بالتحقق بأعداد.

الكفاءات المستهدفة
• تعريف بعد نقطة عن مستقيم وتعيينه.

مكتسبات
- البعد بين نقطتين.
- إنشاء مستقيم عموديٍ على آخر.

ما يلزمك معرفته
(1) بعد نقطة عن مستقيم

بعد نقطة عن مستقيم هو أصغر مسافة بين هذه النقطة وهذا المستقيم.

(Δ) مستقيم و A نقطة لا تنتمي إليه، أقرب نقطة من (Δ) إلى النقطة A هي النقطة H حيث (AH) عموديٌ على (Δ).

• من أجل كلّ نقطة M من (D) تختلف عن H فإنّ AM > AH

(2) مجموعات النقط

• مجموعة النقط التي تبعد بعدا ثابتا عن مستقيم معلوم (Δ) هي مستقيمين (D) و (D') بحيث يكوّن كلٌ منهما مع (Δ) شريطا عرضه h

• مجموعة النقط المتساوية البعد عن ضلعي زاوية هي منصّف هذه الزاوية. مثال: مجموعة النقط المتساوية البعد عن ضلعي الزاوية $\widehat{XOY}$ هي نصف المستقيم [OZ).

إجراءات وتقنيات
• إنشاء نقطة تبعد بعدا ثابتا (مثلا: 3cm) عن مستقيم معلوم (Δ) ترسم الدوائر بالترتيب حسب ترقيم تسميتها وبنفس نصف القطر الذي يساوي 3 cm.

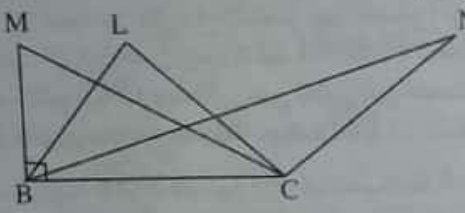
تمارين

1. ارسم مستقيما (D)، ثمّ أنشئ نقطة M تبعد عن (D) مسافة 5 cm.
أنشئ النقطة M' نظيرة النقطة M بالنسبة إلى (D).
ما هو بعد النقطة M' عن المستقيم (D) ؟

2. علّم نقطة A، ثمّ أنشئ مستقيما (D) بحيث A تبعد عنه مسافة 4,5 cm، اكتب مراحل الخطة المتبعة. هل يمكنك رسم مستقيم ثان ؟ وثالث ؟ ماذا تستنتج ؟

3. RST مثلث قائم في النقطة R . M نقطة من [ST] ، (MI) عموديٌ على [RS] في النقطة I. (MJ) عموديٌ على [RT] في النقطة J.
أ) ما هي طبيعة الرباعي MJRI ؟
ب) حدّد موضع النقطة M من [AB] بحيث يكون الطول IJ أصغر ما يمكن.

4. أثبت أنّه إذا كان للمثلثات المرسومة في الشكل أدناه نفس المساحة، فإنّ النقط M ، L ، N على استقامة واحدة.



5. ارسم زاوية $\widehat{XOY}$ قيسها 70° ، ثمّ أنشئ نقطة M تبعد عن (OX) مسافة 3 cm وعن (OY) مسافة 2 cm. اكتب مراحل الخطة المتبعة.

6. أنجز مثيلا للشكل المعطى، ثمّ :
أ) أنشئ النقطتين M و M' من (D) بحيث تبعد كلٌ منهما مسافة 5cm عن النقطة A.
ب) احسب المسافة MM'.

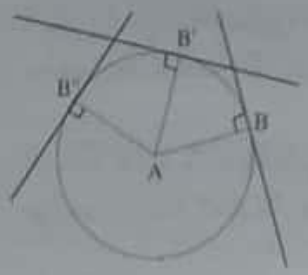
7. ارسم مستقيما (D) ونقطة A تبعد عنه مسافة 3 cm.
أ) أنشئ النقطتين M و M' حيث تبعد كلٌ منهما 3 cm عن النقطة A و 2 cm عن المستقيم (D).

8. ارسم مستقيما (D) وعلّم نقطة A لا تنتمي إليه، ولتكن M نقطة من (D) المستقيم العموديٌ على (D) الذي يشمل النقطة M يقطع محور [AM] في النقطة N.
أثبت أنّ النقطة N متساوية البعد عن النقطة A وعن المستقيم (D).

صحيح أم خطأ ؟ تجود أكثر من نقطة تبعد عن مستقيم معلوم مسافة معلومة

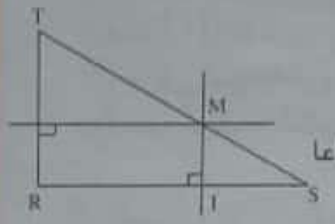
حلول التمارين

1. نرسم مستقيما (D)، ثمّ نفتح المدور فتحة قدرها 5 cm ونرسم دائرة (C1) مركزها O نقطة من (D)، (C1) تقطع (D) في نقطتين نسمي إحداهما A عموديا على (D) في نقطة منه H، ثمّ نعلّم نقطة M من (D') حيث HM = 5 cm، نعيّن M' نظيرة النقطة M بالنسبة إلى (D) إنّ M'H = MH = 5 cm، ومنه ومنه بعد النقطة M' عن المستقيم (D) يساوي 5 cm.



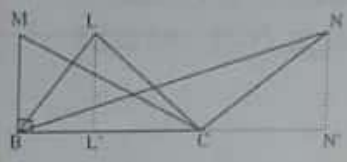
2. نرسم مستقيما يشمل النقطة A، ثمّ نعلّم عليه نقطة B بحيث AB=4,5 cm، نرسم المستقيم (D) الذي يشمل B ويعامد المستقيم (AB). نعم يمكن رسم مستقيم ثان وثالث ورابع و(...لاحظ الشكل.) نستنتج أنه يوجد عدد غير منته من المستقيمات التي تبعد عن A مسافة 4,5 cm. هذه المستقيمات هي المماسات للدائرة ذات المركز A ونصف القطر 4,5 cm.

3. أ) النقطتان M و J تبعدان نفس البعد عن المستقيم (IR) ومنه JR = MI و(MI) و (JR) عموديان على (IR) إذن الرباعي MJRI مستطيل.

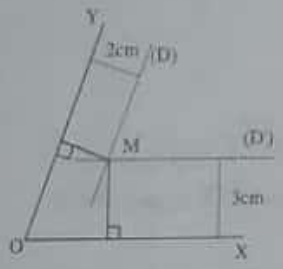


ب) لدينا RM = IJ، ومنه يكون الطول IJ أصغر ما يمكن عندما يكون الطول RM أصغر ما يمكن، وهذا محقق في حالة RM ارتفاعا في المثلث RST متعلقا بالضلع [ST] (انظر عمود الإرشادات.)

4. بما أنّ للمثلثات الثلاثة نفس المساحة، ومشتركة في الضلع [BC] فإنّ لها نفس الارتفاع المتعلق بهذا الضلع (أي : [BC] انظر عمود الإرشادات.) ومنه النقط M ، L ، N تبعد نفس البعد عن المستقيم (BC) وبالتالي فهي تنتمي إلى المستقيم الموازي (BC) الذي يصنع معه شريطا عرضه BM.



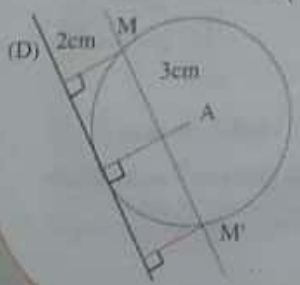
5. نرسم زاوية $\widehat{XOY}$ قيسها 70°، ثمّ نعلّم نقطة A تبعد عن (OX) مسافة 3 cm ، وننشيء المستقيم (D) الذي يشمل A يوازي (OX). نعلّم نقطة B تبعد عن (OY) مسافة 2 cm ، وننشيء المستقيم (D') الذي يشمل B يوازي (OY)، يتقاطع (D) و(D') في النقطة M.



6. أ) نرسم دائرة مركزها A ونصف قطرها 5 cm تقطع المستقيم (D) في النقطتين M و M' المطلوب.

ب) في المثلث MAA' لدينا MA'² + A'A² = MA'² ومنه AM² + 9 = 25 وبالتالي MA'² = 16 أي : MA' = 4 cm نستنتج أنّ MM' = 8 cm

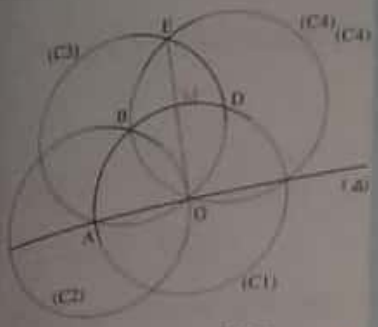
7. نرسم مستقيما (D)، ثمّ نقطة A تبعد عنه مسافة 3 cm. نرسم الدائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها 3 cm. ثم ننشئ من جهة A مستقيما (D') يوازي (D) ويبعد عنه مسافة 2 cm، فيقطع الدائرة (C) في النقطتين M و M'.



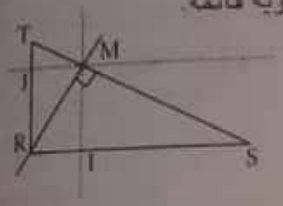
8. بما أنّ النقطة N تنتمي إلى المستقيم العمودي على (D) في النقطة M فإنّ MN هو بعدها عن (D)
وبما أنّ النقطة N تنتمي إلى محور [AM] فإنّ MN=NA ومنه N متساوية البعد عن النقطة A وعن (D).

الإجابة صحيح.

إرشادات وتوجيهات



- بعد نقطة عن مستقيم هو أصغر مسافة بين هذه النقطة وهذا المستقيم.
- في التمرين 3 يمكن الاعتماد على أنّ زاويا الرباعي MJRI قائمة، أو أنّ في كلّ ضلعين متقابلين متوازيان، وزاوية قائمة.



- في التمرين 4

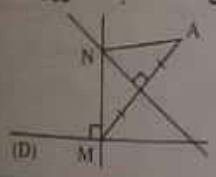
$$\mathcal{A}_{(MB)} = \frac{1}{2} MB \times BC$$

$$\mathcal{A}_{(LBC)} = \frac{1}{2} LL' \times BC$$

$$\mathcal{A}_{(NBC)} = \frac{1}{2} NN' \times BC$$

بما أنّ $\mathcal{A}_{(MBC)} = \mathcal{A}_{(NBC)} = \mathcal{A}_{(LBC)}$ فإنّ $MB \times BC = \frac{1}{2} LL' \times BC$ ومنه $MB = NN' = LL' = \frac{1}{2}$

- في التمرين 5 واضح لماذا النقطة M المنشأة تبعد عن (OX) مسافة 3cm وعن (OY) مسافة 2cm.
- في التمرين 6 الجزء ب) بما أنّ A منتصف [MM'] فإنّ MM' = 2MA' وبالتالي نحسب MA' بتطبيق نظرية فيثاغورس في المثلث القائم MAA'.
- الشكل المناسب للتمرين 8.



الكفاءات المستهدفة

- معرفة الوضعيات النسبية لمستقيم ودائرة.
- انشاء مماس لدائرة في نقطة منها.

مكتسبات

- الدائرة: تعاريف وخواص مثل الوتر، القطر، القوس، داخل (أوخارج) دائرة ...إلخ

ما يلزمك معرفته

(1) الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة

يمكن لدائرة ومستقيم أن يكونا إما منفصلين، أو متقاطعين في نقطة أو نقطتين.

(C) دائرة مركزها O ونصف قطرها r، و(D) مستقيم، OH بعد O عن (D)

- منفصلان

$OH > r$

- متقاطعان في نقطة

$OH < r$

- مماسان

$OH < r$

(2) إنشاء مماس لدائرة

(C) دائرة و A نقطة

A تنتمي إلى (C)

العمودي على (OA) الذي يشمل A مماس (C)

A لا تنتمي إلى (C)

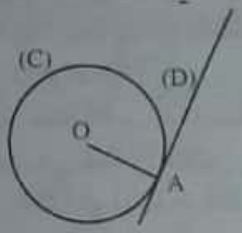
الدائرة التي قطرها [OA] تقطع (C) في نقطتين M و N، وكل من (AM) و (AN) مماس لـ (C)

تمارين

1. ارسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها 3 cm، ثم مستقيما (D) بحيث النقطة O تبعد عنه مسافة 2 cm.
أ) بيّن لماذا (D) يقطع (C) في نقطتين متمايزتين، وسمّيهما A و B.
ب) احسب الطول AB بالتدوير إلى 0,01.

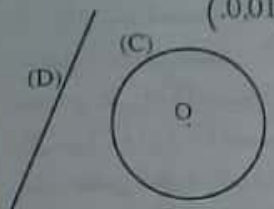
2. ABCD مستطيل طوله AD، (C) دائرة مركزها B ونصف قطرها AB و (C') دائرة مركزها D ونصف قطرها AD.
أ) أثبت أنّ المستقيم (AB) يمس الدائرة (C') في النقطة A، و (AD) يمسّ الدائرة (C) في النقطة A.
ب) ماذا يمثّل المستقيم (BC) بالنسبة إلى الدائرة (C) ؟
ج) أثبت أنّ المستقيم (BC) يقطع الدائرة (C').

3. C دائرة مركزها O ونصف قطرها R، (D) مماسٌ لها في نقطة منها A لنبرهن على أنّ (D) عموديٌ على (AO).

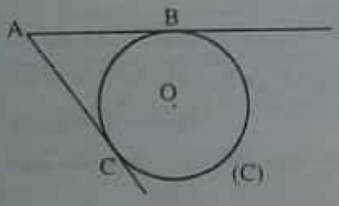


أ) علّم نقطة M من (D) تختلف عن A، وبيّن أنّ النقطة M تقع خارج الدائرة (C).
ب) استنتج أنّه من أجل كلّ نقطة M من (D) تختلف عن A فإنّ $OM > r$.
ج) استنتج أنّ أصغر مسافة بين النقطة O والمستقيم (D) هي AO، ومنه (D) عموديٌ على (AO).

4. (C) دائرة مركزها O ونصف قطرها 4 cm، و A نقطة بحيث $OA = 6$ cm القطعة [AO] تقطع (C) في النقطة B. (Δ) مماس (C) في النقطة B المستقيم الذي يشمل النقطة O. يقطع المستقيم العمودي على (AO) الذي يشمل A في النقطة C، بحيث $AC = 3$ cm. القطعة [CO] تقطع (Δ) في النقطة D.
أ) أنجز شكلا مناسبا بدقّة.
ب) احسب الأطوال: OC و BD و OD (أعط النتائج مدوّرة إلى 0,01.)



5. أنجز مثيلا للشكل المرفق.
أ) أنشئ مستقيما مماسا للدائرة (C) ويوازي المستقيم (D)، كم مستقيما يمكنك أن تنشئ ؟
ب) أنشئ مستقيما مماسا للدائرة (C) ويعامد المستقيم (D)، كم مستقيما يمكنك أن تنشئ ؟

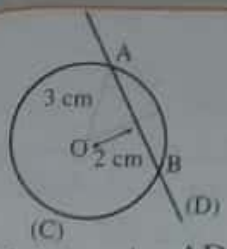


6. (C) دائرة و A نقطة خارجها، (AB) و (AC) مماسان للدائرة (C) في النقطتين B و C على التّرتيب.
أثبت أنّ $AB = AC$.

أصحيح أم خطأ ؟ المستقيم القطريّ يشترك مع الدائرة في ثلاث نقط

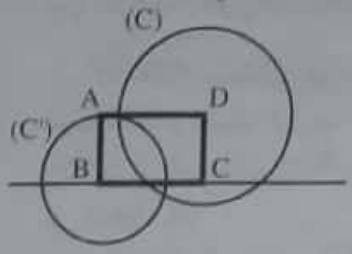
حلول التمارين

1. أ) بما أنّ بعد النقطة O عن (D) أصغر من نصف القطر فإنّ (D) يقطع (C) في نقطتين متمايزتين A و B.



ب) لدينا $\left[\frac{1}{2}AB\right]^2+2^2=3^2$ ومنه $AB=4,47$

2. أ) مركز الدائرة (C') (النقطة D) يبعد عن المستقيم (AB) مسافة AD تساوي نصف قطر الدائرة (C').

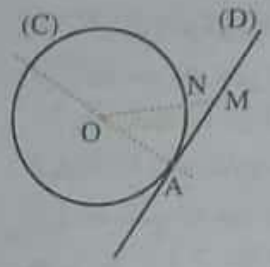


ومنه فإنّ (AB) يمس (C') في النقطة A. مركز الدائرة (C) (النقطة B) يبعد عن المستقيم (AD) مسافة AB تساوي نصف قطر الدائرة (C). ومنه فإنّ (AD) يمس (C) في النقطة A.

ب) المستقيم (BC) هو مستقيم قطري في الدائرة (C) يشمل مركزها B ويقطعها في نقطتين متمايزتين.

ج) بما أنّ بعد المستقيم (BC) عن D (مركز (C')) هو DC وهو اصغر من نصف قطرها AD (لأنّ AD طول المستطيل ABCD) فإنّ (BC) يقطع الدائرة (C') في نقطتين متمايزتين.

3. أ) بما أنّ (D) مماسا الدائرة (C) في النقطة A و M تختلف عن A، و N نقطة تقاطع [OM] و(C) فإنّ $OM > ON$ ومنه M تقع خارج الدائرة (C).



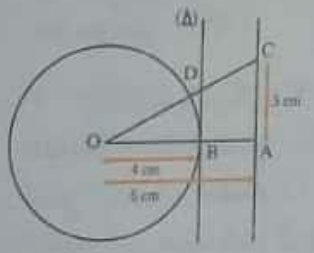
ب) من أجل كلّ نقطة M من (D) تختلف عن A فإنّ [OM] و (C) متقاطعان في نقطة N مثلا.

ومنه $OM > ON$ أي أنّ $OM > r$.

ج) من أجل كلّ نقطة M من المستقيم (D) تكون المسافة OM أصغر ما يمكن إذا انطبقت النقطة M على A وهي AO ومنه (D) عمودي على (AO).

4. بما أنّ المثلث ACO قائم في A فإنّ $OC^2=6^2+3^2=45$

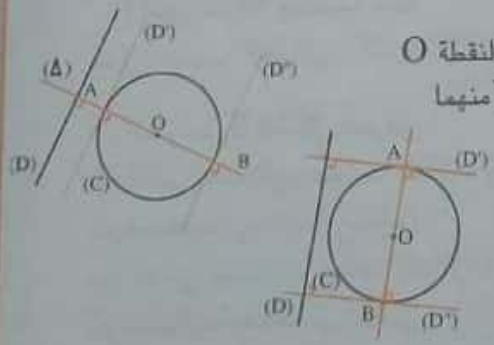
ومنه $OC=6,71$ cm



بما أنّ (AC) و(BD) عموديين على (OA) فإنّهما متوازيان ومنه $\frac{OD}{OC}=\frac{OB}{OA}=\frac{BD}{AC}$ ومنه BD=2cm

و $OD=4,47$ cm

5. أ) نرسم المستقيم (Δ) العمودي على (D) الذي يشمل النقطة O فيقطع (C) في نقطتين A و B. ثمّ نرسم (D') و (D'') كلّ منهما عمودي على (D) ويشملان A و B على الترتيب.



كلّ من (D') و (D'') مماس للدائرة (C).

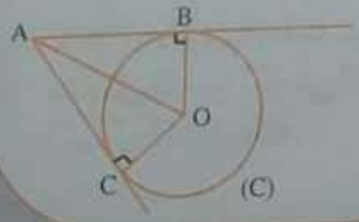
ب) بنفس الطريقة السابقة مع البدء برسم المستقيم (Δ) الموازي لـ (D) الذي يشمل النقطة O.

6. لدينا في المثلثين القائمين BAO و CAO

$OB=OC$ (B و C من الدائرة (C))

والوتر OA مشترك

فهما متقايسان، ومن تقايسهما نجد أنّ $AB=AC$



الإجابة خطأ. لأنّ مركز الدائرة ليس نقطة منها.

إرشادات وتوجيهات

- المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطتين متمايزتين يبعد عن مركزها بعدا أصغر من طول نصف قطرها والعكس.
- في التمرين 1 لحساب AB يمكن الاستفادة من التمرين 6 في البطاقة السابقة.
- إذا كان (D) مماسا في نقطة A من دائرة مركزها O ونصف قطرها r فإنّ كلّ نقطة M من (D) تختلف عن A تحقق $OM > OA$
- المماس في دائرة عمودي على المستقيم القطري الذي يشمل نقطة التماس.
- في التمرين 5 في كلّ من الجزأين أ) و ب) نجد مستقيمين (D) و(D') متناظرين بالنسبة إلى المركز O.
- المماس لدائرة عمودي على نصف القطر في نقطة التماس.

جيب تمام زاوية حادة (1)

الكفاءات المستهدفة

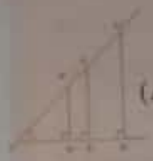
- تعريف جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم.
- تعيين قيمة مقربة لجيب تمام زاوية حادة أو لتعيين قيس زاوية بمعرفة جيب التمام لها.

مكتسبات

- حساب نسب، وزوايا في مثلث قائم.

ما يلزمك معرفته

1. جيب تمام زاوية



$\widehat{XOY}$ زاوية. كلّ من (AB) و (AB') و (AB'') عموديّ على (OY).

إنّ: $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OB''}{OA''}$

في المثلث القائم

ABC مثلث قائم.

النسبة $\frac{\text{طول الضلع المجاور لزاوية}}{\text{طول الوتر}}$ تسمّى جيب تمام هذه الزاوية.

ونكتب مثلا: $\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC}$

في المثلّث القائم جيب تمام زاويةٍ حادّة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المجاور لها على الوتر.

ملاحظة: جيب تمام زاويةٍ حادّة محصور بين 0 و 1 لأن الوتر أطول ضلع في المثلّث.

2. جيب تمام زاوية حادة

تستعمل اللمسة cos لحساب جيب تمام زاويةٍ علم قيسها.

مثال: لحساب $\cos 52°$ نضغط على اللمسات من اليسار إلى اليمين:

5	2	cos	=

أو

cos	5	2	=

فيظهر الناتج 0,6156614753

ومنه $\cos 52° \approx 0,26$

تمارين

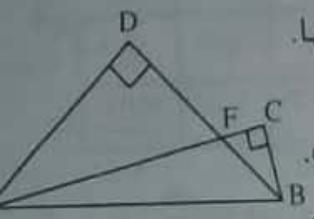
1. ارسم زاويةً $\widehat{XOY}$ قيسها $60°$، وعلّم على [OX] ثلاث نقط A وB وC حيث $OA = 2$ cm و $OB = 3,5$ cm و $OC = 5$ cm. أنشئ بدقة المستقيمات العموديّة على [OX] التي تشمل النقط A وB وC، فتقطع [OY] في النقط E وF وG على التّرتيب.

أ) تحقق من أنّ $OE = 4$ cm، ثمّ قس الطّولين OF وOG.

ب) احسب كلاّ من النّسب: $\frac{OA}{OE}$ و $\frac{OB}{OF}$ و $\frac{OC}{OG}$. ماذا تلاحظ؟

ج) استنتج جيب تمام الزاوية $60°$ (أي $\cos 60°$).

2. باستعمال الشكل المرفق انقل العبارات الآتية وأكملها.



أ) $\cos \ldots\ldots = \frac{AC}{AB}$ ب) $\cos \ldots\ldots = \frac{AD}{AB}$

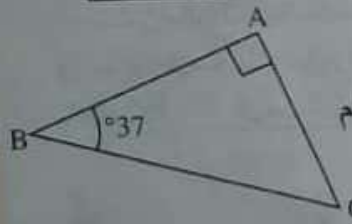
ج) $\cos \ldots\ldots = \frac{FD}{FA}$ د) $\cos \widehat{CBF} = \ldots\ldots$.

هـ) $\cos \widehat{BAD} = \ldots\ldots$. و) $\cos \widehat{CAD} = \ldots\ldots$.

3. انقل الجدول الآتي ثمّ أكمله باستعمال آلة حاسبة:

x	21°	35°	62°	75°	88°
القيمة المدوّرة إلى 0,01 لـ $\cos x$					

4. ABC مثلّث قائم في A، حيث $\widehat{ABC} = 37°$. احسب باستعمال آلة حاسبة القيمة المدوّرة إلى 0,01 لجيب تمام كلّ من زاويةّ الرأس B وزاويةّ الرأس C.



5. أنشئ باستعمال المدور والمسطرة فقط (أي دون استعمال المنقلة) زاويةً XOY دون حساب قيسها في كلّ مما يأتي:

أ) $\cos \widehat{XOY} = \frac{3}{7}$ ب) $\cos \widehat{XOY} = \frac{5}{9}$ ج) $\cos \widehat{XOY} = 0,75$

6. انقل الجدول الآتي ثمّ أكمله باستعمال آلة حاسبة:

القيمة المدوّرة إلى الدرجة لـ x					
$\cos x$	0,93	0,8	0,47	0,16	0,33

7. x قيس زاويةٍ بالدّرجات، احسب باستعمال آلة حاسبة قيمة x مدوّرة إلى الدّرجة إنْ أمكن في كلّ مما يأتي:

أ) $\cos x = 0,12$ ب) $\cos x = 0,5$ ج) $\cos x = \frac{19}{3}$

د) $\cos x = 0$ هـ) $\cos x = 1$ و) $\cos x = 1,5$

أصحيح أم خطأ؟

ترجد زاوية حادة جيب تمامها سالب

حلول التمارين

1. 1) بالقياس نجد OE ضعف OA ومنه $OE = 4\ cm$

$OF = 7cm$ و $OG = 10\ cm$

ب) $\frac{OA}{OE} = \frac{1}{2}$ و $\frac{OB}{OF} = \frac{1}{2}$ و $\frac{OC}{OG} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

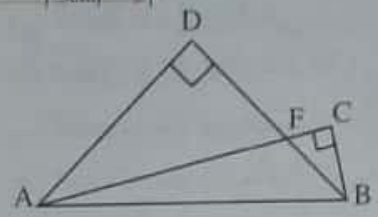
الاحظ أن كلّ النّسب متساوية وتساوي $\frac{1}{2}$

ج) جيب تمام الزّوية $60°$ يساوي $\frac{1}{2}$ (أي $\cos 60° = \frac{1}{2}$)

2. 1) $\cos \widehat{CAB} = \frac{AC}{AB}$. ب) $\cos \widehat{DAB} = \frac{AD}{AB}$.

ج) $\cos \widehat{DFA} = \frac{FD}{FA}$. د) $\cos \widehat{CBF} = \frac{BC}{BF}$.

هـ) $\cos \widehat{ABD} = \frac{BD}{BA}$. و) $\cos \widehat{DAF} = \frac{AD}{AF}$.

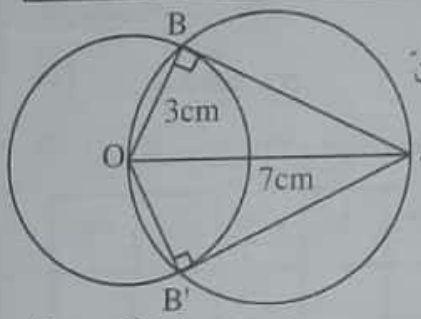


3.

x	$21°$	$35°$	$62°$	$75°$	$88°$
القيمة المدوّرة إلى 0,01 لـ $\cos x$	0,93	0,8	0,47	0,26	0,03

4. بما أنّ $\widehat{ABC}$ مثلث قائم في A و $\widehat{ABC} = 37°$ فإنّ $\widehat{BCA} = 90° - 37° = 53°$.

$\cos 37° = 0,8$ و $\cos 53° = 0,6$



5. ننشئ مثلثا ABO قائما في B حيث $OB = 3\ cm$ و $OA = 7\ cm$. فتكون $\widehat{XOY} = \widehat{BOA}$

ولإنشائه نرسم دائرة قطرها، ودائرة مركزها يونصف قطرها 3 cm تقطع الدّائرة الأولى في نقطتين B و B' كلّ من الزّاويتين BOA و B'OA تساوي XOY.

6.

القيمة المدوّرة إلى الدرجة لـ X	$21°$	$35°$	$62°$	$75°$	$88°$
$\cos x$	0,93	0,8	0,47	0,26	0,33

7. 1) $\cos x = 0,12$ ومنه $x = 83°$ ب) $\cos x = 0,5$ ومنه $x = 60°$

ج) $\cos x = \frac{19}{3}$ لا يمكن حساب x لأنّ: $\frac{19}{3} > 1$

د) $\cos x = 0$ ومنه $x = 90°$ هـ) $\cos x = 1$ ومنه $x = 0°$

و) $\cos x = 1,5$ لا يمكن حساب x لأنّ $1,5 > 1$

الإجابة خطأ. جيب تمام زاوية حادة محصور بين 0 و 1.

إرشادات وتوجيهات

- يمكن التّحقق باستعمال نظرية طاليس أنّ $\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} = \frac{OG}{OC}$
- $\cos \widehat{AOE} = \frac{OA}{OE}$
- في المثلّث القائم جيب تمام زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المجاور لها على طول الوتر.
- مجموع زوايا مثلّث يساوي $180°$.
- مجموع الزّاويتين غير القائمتين في المثلّث القائم يساوي $90°$.
- في التّمرين 5 الجزء ب) ننشئ مثلّثا ABO قائما في B بحيث $OB = 5\ cm$ و $OA = 9\ cm$. فتكون BOA = XOY.
- في التّمرين 5 الجزء ج) يمكن إنشاء مثلّث ABO قائم في صبحيث $OB = 7,5cm$ و $OA = 10\ cm$ (لأن $\frac{7,5}{10} = 5,7$)
- جيب تمام زاوية حادّة محصور بين 0 و 1 لأن الوتر أطول ضلع في المثلّث.

40 جيب تمام زاوية حادة (2)

الكفاءات المستهدفة • حساب زوايا أو أطوال بتوظيف جيب التمام.

ما يلزمك معرفته

1 جيب التمام والآلة الحاسبة

• لحساب قيس زاوية علم جيب تمامها نستعمل اللمسة الموافقة.

($\cos^{-1}$) بالضغط على 2nd أو shift و inv ثم cos حسب الآلة المستعملة.

• مثال: لحساب الزاوية x حيث $\cos x = 0{,}57$ نضغط على اللمسات من اليسار إلى اليمين:

[2nd] [cos] [.] [5] [7] [=]

فيظهر الناتج 55,24977425، ومنه $x \approx 55{,}2°$.

انتبه قبل الشروع في الحساب ينبغي التأكد من أنّ الحاسبة تعمل في نظام الدرجة.

2 استعمال جيب تمام زاوية حادة

لحساب قيس زاوية حادة

ABC قائم في C

1) نحسب الزاوية BAC

من العلاقة: $\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$

ب) نحسب أولا AB

من علاقة فيثاغورس،

ثمّ نحسب الزاوية BAC

من العلاقة: $\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$

3 استعمال جيب زاوية لحساب طول قطعة مستقيم

ABC قائم في C نحسب الطول AB من العلاقة:

$$AB = \frac{AC}{\cos \widehat{BAC}}$$

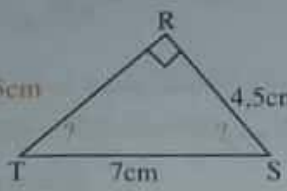
نحسب AC من العلاقة:

$$AC = AB \times \cos BAC$$

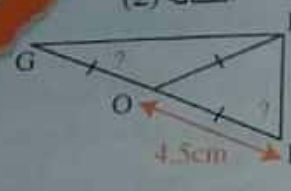
تمارين

1. احسب قيسي الزاويتين المجهولتين بالتدوير إلى الدرجة في كلّ من الشكلين.

الحالة (1)

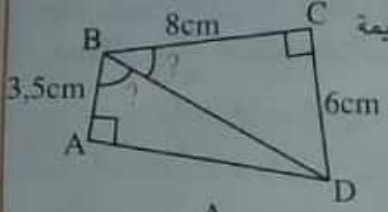


الحالة (2)

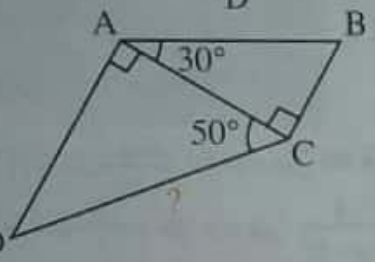


2. ABCD معيّن مركزه O حيث $AC = 8$ cm و $BD = 5$ cm، احسب القيمة المدوّرة إلى الدرجة لقيس الزاوية $\widehat{ABC}$، واستنتج قيس كلّ من الزاويتين $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCA}$.

3. باستعمال المعطيات المبيّنة في الشكل المرفق احسب القيمة المدوّرة إلى الدرجة لقيس كلّ من الزاويتين CBD و ABD.



4. أكمل كلاّ مما يأتي واحسب القيمة المضبوطة أو المدوّرة إلى 0,01 لـ x.

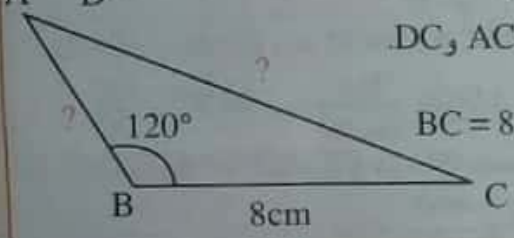


ا) إذا كان $\cos 60° = \frac{x}{10}$ فإنّ $x =$ .....

ب) إذا كان $\cos 30° = \frac{8}{x}$ فإنّ $x =$ .....

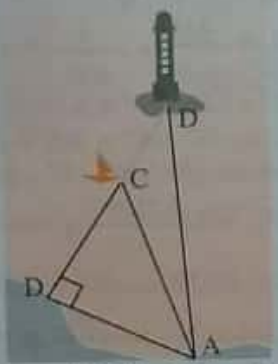
5. باستعمال المعطيات المبيّنة في الشكل المرفق.

احسب القيمة المدوّرة إلى 0,01 لكلّ من الطولين AC و DC.



6. ABC مثلّث مساحته $16\ cm^2$، فيه $BC = 8$ cm و $\widehat{ABC} = 120°$، احسب بالتدوير إلى 0,01 كلاّ من الطولين AB و AC.

7. إذا علمت أنّ النقط B و C و D في استقامية، والزاوية $\widehat{ABC}$ قائمة، وأنّ $AB = 350$ m و $\widehat{BAC} = 30°$ و $\widehat{CAD} = 10°$ فاحسب الطول CD.



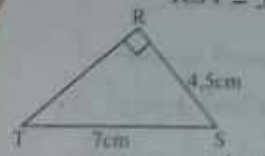
8. التيودوليت Théodolite هو جهاز يمكّن من قياس الزوايا بالنسبة إلى الأفق، ويستعمل كما هو مبيّن في الشكل المرفق.

باستعمال المعطيات المبيّنة على الشكل احسب CD ارتفاع المنارة.

أصحيح أم خطأ؟ a و b زاويتان، إنّ $(\cos a + \cos b) = \cos(a + b)$

حلول التمارين

1. 1) لحالة (1) المثلث RTS قائم في R ومنه $\cos\widehat{RST} = \frac{4,5}{7}$ و $\widehat{RST} = 50^\circ$



$RT^2 = 7^2 - 5,4^2 = 28,75$ ومنه $RT = 5,36$

$\cos\widehat{RTS} = \frac{5,36}{7}$ ومنه $\widehat{RTS} = 40^\circ$

الحالة (2) المثلث EFG قائم في E لأنّ المتوسط المتعلق بالضلع FG يساوي نصفه

$FG = 4,5 + 4,5 = 9$ ومنه $EG^2 = 9^2 - 3,5^2 = 68,75$ ومنه $EG = 8,29$

$\cos\widehat{EFO} = \frac{3,5}{9}$ ومنه $\widehat{EFO} = 67^\circ$

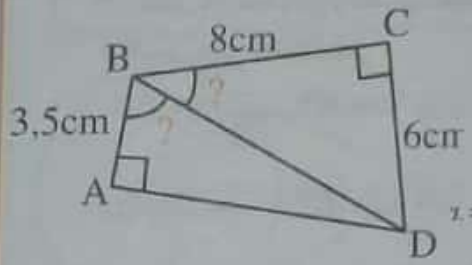
$\cos\widehat{EGO} = \frac{8,29}{9}$ ومنه $\widehat{EGO} = 23^\circ$

2. لدينا $\widehat{ABC} = 2\,\widehat{ABO}$ و $AB^2 = 4^2 = 2,5^2 = 22,25$ ومنه $AB = 4,27$ cm

وبالتالي $\cos\widehat{ABO} = \frac{2,5}{4,72}$ ومنه $\widehat{ABO} = 58^\circ$ إذن $\widehat{ABC} = 116^\circ$

$\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$

3. لدينا $BD^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ ومنه $BD = 10$ cm



$\cos\widehat{CBD} = \frac{8}{10}$ ومنه $\widehat{CBD} = 37^\circ$

$\cos\widehat{DBA} = \frac{3,5}{10}$ ومنه $\widehat{DBA} = 70^\circ$

4. 1) إذا كان $\cos 60^\circ = \frac{x}{10}$ فإنّ $x = 10 \times 60^\circ$ ومنه $x = 5$

ب) إذا كان $\cos 30^\circ = \frac{8}{x}$ فإنّ $x = \frac{8}{\cos 30^\circ}$ ومنه $x = 9,24$

5. $\cos 30^\circ = \frac{AC}{5}$ ومنه $AC = 5\cos 30^\circ$ أي $AC = 4,33$ cm

$\cos 50^\circ = \frac{AC}{DC}$ ومنه $DC = \frac{33,4}{\cos 50^\circ}$ أي $DC = 6,74$ cm

6. نرسم من A المستقيم العمودي على (BC) فيقطعه في النقطة M المثلث AMB قائم، و $\widehat{MBA} = 30^\circ$ و $\widehat{BAM} = 60^\circ$

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{8 \times AM}{2} = 16$ معناه $AM = \frac{16 \times 2}{8}$ ، $AM = 4$ cm

لدينا $\cos 30^\circ = \frac{AM}{AB}$ ومنه $AB = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{0,87}$ أي : $AB = 4,62$ cm

لحساب AC نحسب أولا MB. $MB^2 = 4,62^2 - 4^2 = 5,34$ ومنه $MB = 2,31$

$MC = MB + BC = 8 + 2,31 = 10,31$ وترا في المثلث القائم AMC

ومنه $AC^2 = 4^2 + 10,31^2 = 122,30$ أي : $AC = 11,60$ cm

7. $\cos 40^\circ = \frac{350}{AD} = 0,77$ أي $AD = \frac{350}{0,77}$ وبالتالي $AD = 456,89$ m

$BD^2 = 456,89^2 - 350^2 = 86248,47$ ومنه $BD = 293,68$ m ، $BD = 293,68$ ومنه

$\cos 30^\circ = \frac{350}{AC} = 0,87$ أي $AC = \frac{350}{0,87}$ وبالتالي $AC = 402,30$ m

$BC^2 = 402,30^2 - 350^2 = 39345,29$ أي : $BC = 198,36$

$CD = BD - BC = 293,68 - 198,36 = 91,12$ أي : $CD = 91,12$

8. $\cos 32^\circ = \frac{AB}{AC}$ ومنه $AC = \frac{20}{\cos 32^\circ}$ وبالتالي $AC = 23,58$ m

$BC^2 = 23,58^2 - 20^2 = 156,02$ ومنه $CB = 12,49$ ، $CD = CB + BD = 12,49 + 1,8 = 14,29$ m

الإجابة خطأ مثلا لاحظ أنّ $\cos(0+0) \neq \cos(0) + \cos(0)$ لأنّ $1 \neq 1+1$

إرشادات وتوجيهات

- طول المتوسّط المتعلّق بالوتر في مثلث قائم يساوي نصف طول الوتر.
- لحساب قيس زاوية يمكن حساب جيب تمامها cos أولا.
- $RT^2 + RS^2 = ST^2$

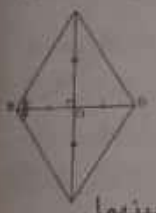
معناه $RT^2 = ST^2 - RS^2$

- $EG^2 + EF^2 = FG^2$

معناه $EG^2 = FG^2 - EF^2$

- في التمرين 2

قطرا المعين متعامدان ومتناصفان، ومنه :

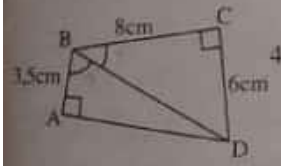


$OB = 2,5$ cm

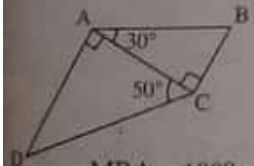
$OA = 4$ cm

كلّ قطر ينصّف الزاويتين المرسوم بينهما.

- التمرين 4



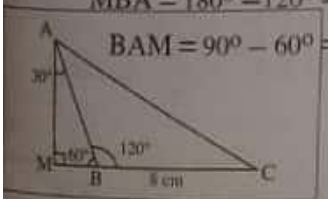
- التمرين 5



- التمرين 6

$MBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$BAM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$



$\cos BAC = \frac{AB}{AC}$ ، $\cos BAD = \frac{AB}{AD}$

$CD = BD - BC$ وعليه نحسب

في البداية كلاّ من BD و BC، وهذا بعد حساب AD.

الكفاءات المستهدفة

• تعيين الانسحاب انطلاقا من متوازي الأضلاع.

مكتسبات

• خواصّ متوازي الأضلاع.

ما يلزمك معرفته

1. الانسحاب هو إزاحة فوق خط مستقيم دون تدوير الشكل (ـ) ينتج من الشكل (ا) بالانسحاب الذي يحوّل A إلى 'A.

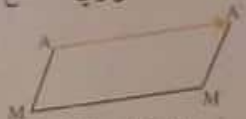
• اتجاه السهم هو اتّجاه الانسحاب.

• نقول أنّ الشكل (ا) هو صورة الشكل (ا) بالانسحاب الذي يحوّل A إلى 'A.

2. صورة نقطة بانسحاب

A، 'A، M ثلاث نقط متمايزة.

أ) إذا كانت النقطة 'M صورة للنقطة M بالانسحاب الذي يحوّل A إلى 'A، فإنّ الرّباعي 'AMM'A متوازي أضلاع.



حالة خاصة إذا كانت M تنتمي إلى ('AA) فإنّ:

• تنتمي أيضا إلى ('AA).

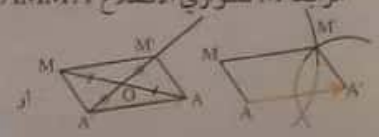
• و MM' = AA'

• و'[MA]، [AM] لهما نفس المنتصف.

إذا كان الرّباعي 'AMM'A متوازي أضلاع، فإنّ النقطة M صورة للنقطة M بالانسحاب الذي يحوّل A إلى 'A.

طريقة

إنشاء صورة النقطة M بالانسحاب الذي يحوّل A إلى A يعني إكمال الرأس الرابعة M لمتوازي الأضلاع 'AMM'A.

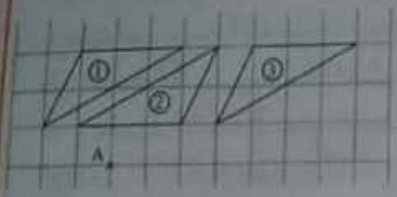


تمارين

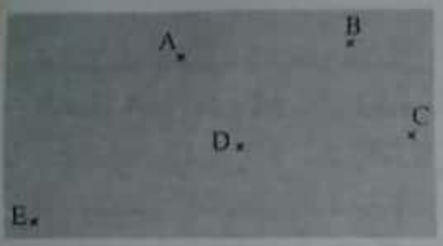
1. عين دون تبرير الحالة التي فيها الشكلان أحدهما صورة للآخر بانسحاب.

أ) ض ض ب) ض ض ج) ض ض

د) ض ض هـ) ض ض و) ض ض



2. حدّد الشكل الذي هو صورة للشكل ا بانسحاب، ثمّ أنشئ صورة النقطة A بهذا الانسحاب.



3. أ) تحقّق من أنّ الانسحاب الذي يحوّل النقطة A إلى النقطة B يحوّل النقطة D إلى C.

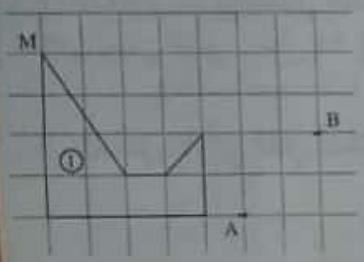
ب) أنشئ صورة النقطة E بهذا الانسحاب.

4. انقل الشكل المرفق على ورقة مسطّرة.

أ) أنشئ الشكل 2 نظير الشكل ا بالنسبة إلى النقطة A، علّم "M نظيرة النقطة M.

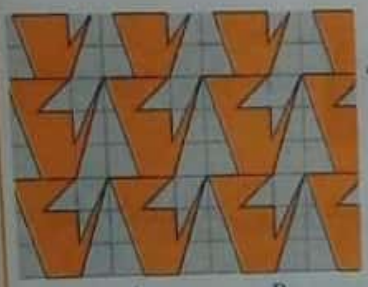
ب) أنشئ الشكل 3 نظير الشكل 2 بالنسبة إلى النقطة B، علّم "M نظيرة النقطة 'M.

ج) ما هو التّحويل الذي يحوّل الشكل 1 إلى الشكل 3



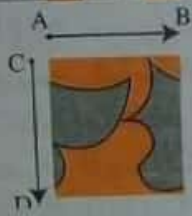
5. نرسم شكلا أوليا على ورقة، ونطبّق عليه انسحابات متتالية، فنحصل على إفريز (تبليط لمستوي الورقة)، والشكل المقابل منجز بهذه التّقنية.

عيّن الشكل الأوليّ الذي أنجز به هذا التّبليط.



6. انقل الشكل المعطى على ورق شفاف، وباستعمال الانسحابات المتتالية التي تحوّل النقطة A إلى النقطة B والتي تحوّل النقطة C إلى النقطة D.

أنجز تبليطا لورقة غير مسطّرة.



7. ارسم معلما (متعامدا ومتجانسا) علّم النقط A (1;2)، B (2;4)، C (1;4)، D (2;−1)، E (2;1).

أ) أنشئ صورة المضلّع ABCDE بالانسحاب الذي يحوّل النقطة A إلى النقطة C.

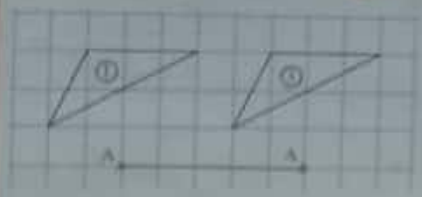
ب) اكتب إحداثيات صور النقط A، B، C، D، E.

صحيح أم خطأ؟ الانسحاب الذي يحوّل النقطة A إلى النقطة B يحوّل النقطة C إلى D.

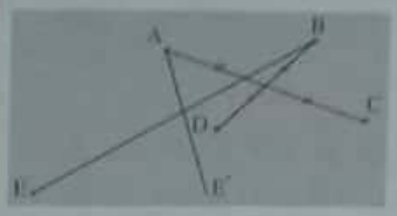
حلول التمارين

1. الحالات التي فيها الشكلان أحدهما صورة للآخر بانسحاب هي:
أ) ض ض ب) ض ض ج) ض ض

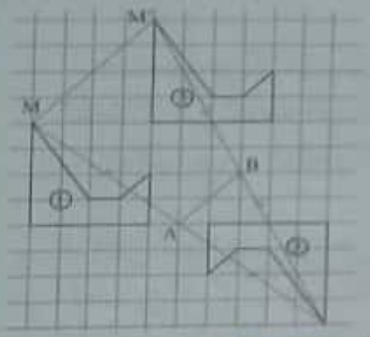
2. الشكل 3 هو صورة للشكل 1 بانسحاب.
صورة النقطة A بهذا الانسحاب هي النقطة A'.
انظر الشكل.



3. أ) الرباعي ABCD متوازي أضلاع لأنّ قطريه متناصفان. ومنه الانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة B يحول النقطة D إلى C.
ب) صورة النقطة E بهذا الانسحاب هي النقطة E' بحيث الرباعي AEE'B متوازي أضلاع.



4. نشاء الشكل 2 نظير الشكل 1 بالنسبة إلى النقطة A، وتعليم M' نظيرة النقطة M.
ب) إنشاء الشكل 3 نظير الشكل 2 بالنسبة إلى النقطة B، وتعليم M'' نظيرة النقطة M'.
ج) التحويل الذي يحول الشكل 1 إلى الشكل 3 هو الانسحاب الذي يحول M إلى M''.

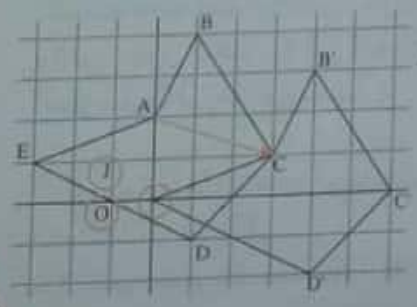


5. الشكل الأولي الذي أنجز به هذا التبليط هو

6. باستعمال الجزء

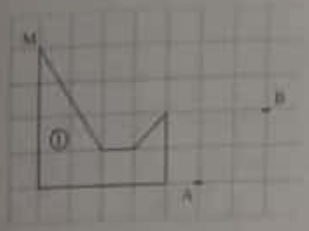
يمكن التبليط على ورقة غير مسطّرة

7. أ) إنشاء صورة المضلّع ABCDE بالانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة C.
ب) كتابة إحداثيات النقط A'، B'، C'، D'، E' صور النقط A، B، C، D، E على الترتيب: A'(4;1)، B'(5;3)، C'(7;0)، D'(5;-2)، E'(1;0).



إرشادات وتوجيهات

- الانسحاب هو إزاحة فوق خط مستقيم دون تدوير.
- لاحظ أنّ صورة الشكل لم تتغير.
- إنشاء صورة النقطة E بالانسحاب الذي يحول A إلى B يعني إكمال الرأس الرابعة E' لمتوازي الأضلاع AEE'B.



- الشكل الأولي المطلوب في إفريز ما هو أصغر جزء منه، والذي يمكّن من إعادة إنجاز الإفريز بتطبيق انسحابات متتالية عليه.
- لاحظ أن A هي C و E' هي J.
- تعني بإحداثيتي نقطة فاصلتها وترتيبها.

الإجابة خطأ. بل يحول النقطة D إلى C وليس C إلى D.

42 الانسحاب (2)

الكفاءات المستهدفة

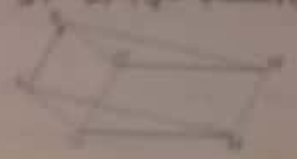
- إنشاء صورة نقطة أو قطعة مستقيم أو مستقيم أو نصف مستقيم أو دائرة بالانسحاب.
- معرفة خواص الانسحاب وتوظيفها.

مكتسبات

- معرفة الانسحاب.
- إنشاء صورة نقطة بانسحاب.

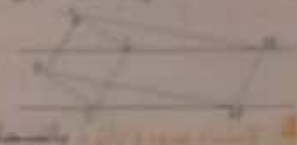
ما يلزمك معرفته

1. إنشاء صورة قطعة مستقيم بانسحاب: نشئ صورتي طرفيها بهذا الانسحاب، ونصل بينهما. مثال: [O'M'] صورة [OM] بالانسحاب الذي يحول A إلى B.



2. إنشاء صورة مستقيم بانسحاب: نشئ صورة نقطة منه بهذا الانسحاب، ثم نرسم نصف المستقيم المعيّن بالصورتين. مثال: (O'M') صورة (OM) بالانسحاب الذي يحول A إلى B.

3. إنشاء صورة مستقيم بانسحاب: نشئ صورتي نقطتين منه بهذا الانسحاب، ثم نرسم المستقيم المعيّن بالصورتين. مثال (L'M') صورة (LM) بالانسحاب الذي يحول A إلى B.



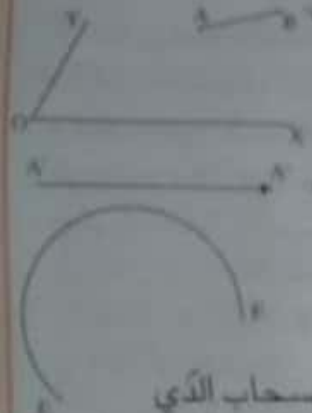
4. إنشاء صورة دائرة بانسحاب: نشئ صورة مركزها بهذا الانسحاب، ثم نرسم الدائرة التي مركزها الصورة وبنفس نصف القطر. مثال (C') صورة (C) بالانسحاب الذي يحول A إلى B.

تمارين

1. علّم ثلاث نقط غير مستقيمية A، B، C. ثمّ أنشئ بالانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة B صورة كلّ من :
أ) قطعة المستقيم [BC]
ب) المستقيم (AC)
ج) الدائرة التي مركزها النقطة A ونصف قطرها AB.

2. علّم نقطتين متمايزين A وB. وارسم مستقيما (D) يوازي (AB)، ثمّ أنشئ صورة المستقيم (D) بانسحاب يحول النقطة A إلى النقطة B ماذا تلاحظ ؟

3. $\widehat{XOY}$ زاوية كيفية. A ، B نقطتان متمايزتان كما في الشكل.
أ) أنجز مثيلا للشكل المعطى، وأنشئ صورة الزاوية $\widehat{XOY}$ بالانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة B.
ب) كيف تبرهن على أنّ الزاوية $\widehat{XOY}$ وصورتها متقايستان ؟

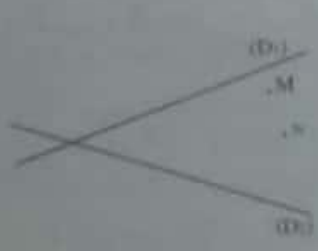


4. انقل الشكل المقابل، ثمّ أنشئ صورة القوس EF بالانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة A.

5. ارسم مثلثا ABC، ثمّ أنشئ النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي يحول النقطة B إلى النقطة C، والنقطة F صورة النقطة A بالانسحاب الذي يحول النقطة C إلى النقطة B.
برهن على أنّ النقطة A منتصف [EF].

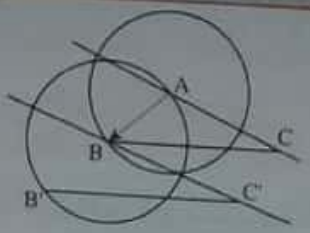
6. ارسم دائرة (C) قطرها [AB]، ولتكن D نقطة من (C) تختلف عن كلّ من A وB. أنشئ النقطة E صورة النقطة D بالانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة D، والنقطة F صورة النقطة B بنفس الانسحاب.
أ) ما نوع الرباعي BDEF ؟ برّر جوابك.
ب) هل يوجد انسحاب يحول الدائرة (C) إلى الدائرة التي قطرها [EF] ؟ برّر جوابك.

7. ارسم مستقيمين متقاطعين (D^1) و(D^2)، وعلّم نقطتين متمايزتين M وN كما في الشكل.
أ) أنشئ المستقيم (Δ_1) صورة المستقيم (D_1) بالانسحاب الذي يحول النقطة M إلى النقطة N.
ب) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و(D_2) متقاطعان.
ج) أنشئ متوازي الأضلاع MNOP بحيث تكون النقطة P من (Δ_1) والنقطة O من (D_2).



أصحيح أم خطأ ؟
صورة النقطة A بالانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة B هي النقطة B

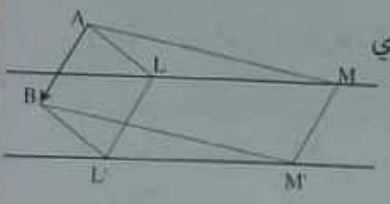
حلول التمارين



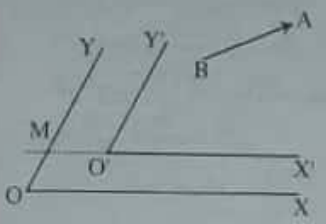
1. 1) ننشئ B' و C' صورتي B و C على التّرتيب بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة B ومنه $[B'C']$ صورة $[BC]$ بالانسحاب نفسه.

ب) بما أنّ B و C صورتي A و C على التّرتيب بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة B، فإنّ (BC') صورة (AC) بالانسحاب نفسه.

ج) نرسم الدائرة التي مركزها النّقطة B ونصف قطرها AB ، إنّها صورة الدائرة التي مركزها النّقطة A ونصف قطرها AB.



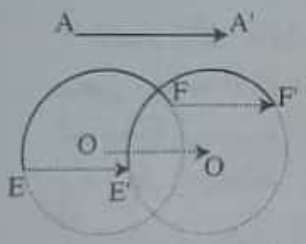
2. نعلّم نقطتين متمايزين A و B، ونرسم مستقيما (D) لا يوازي (AB) ، ثم نعلّم نقطتين متمايزين L و M من (D)، وننشئ صورتيهما L' و M' على التّرتيب بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة B. نلاحظ أنّ صورة المستقيم (D) بانسحاب هي مستقيم $(L'M')$ يوازيه.



3. ننشئ نصف المستقيم $[O'Y')$ صورة نصف المستقيم $[OY)$ بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة B وكذلك ننشئ نصف المستقيم $[O'X')$ صورة نصف المستقيم $[OX)$ ، فنحصل على الزّاوية $X'O'Y'$ صورة الزّاوية XOY بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة B.

ب) لتكن النّقطة M نقطة تقاطع $(O'X')$ و (OY).

$(\widehat{XOY} = \widehat{X'MY}$ بالتماثل)، و $(\widehat{X'MY} = \widehat{X'O'Y}$ بالتماثل) ومنه الزاويتان $\widehat{XOY}$ و $\widehat{X'O'Y'}$ متقايستان.



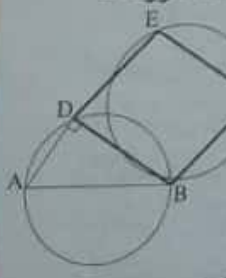
4. نبحث أولا عن O مركز الدّائرة التي تنتمي إليها القوس المعطاة، (انظر عمود الإرشادات.) ننشئ O' صورة O بالانسحاب الذي يحوّل A إلى A' ، ونرسم الدائرة ذات المركز O' ونصف القطر $[OE]$ ، ثمّ ننشئ النقطتين E' و F' صورتا E و F على التّرتيب بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة A'. ومنه $\overset{\frown}{E'F'}$ صورة القوس $\overset{\frown}{EF}$ بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة A'.

5. بما أنّ النّقطة E صورة النّقطة A بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة B إلى النّقطة C، فإنّ $AE=BC$ و $(BC)//(AE)$ وبما أنّ النّقطة F صورة النّقطة A بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة C إلى النّقطة B ، فإنّ $AF=BC$ و $(BC)//(AF)$ ومنه $AF = AE = BC$ و (AE) يوازي (AF). إذن A منتصف $[EF]$.

6. 1) الضلعان $[DE]$ و $[BF]$ متقابلان ومتقايسان وحاملاهما متوازيين لأن E صورة D و F صورة B بنفس الإنسحاب الذي يحوّل A إلى D.

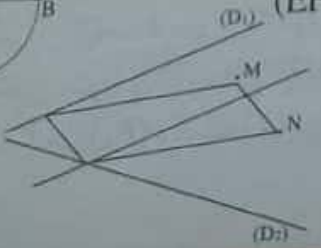
والزّاوية $\widehat{EDB} = 90°$ ومنه الرّباعي $BDEF$ مستطيل.

ب) لا يوجد انسحاب يحوّل الدّائرة (C) إلى الدّائرة التي قطرها $[EF]$ لأنّ AB لا يساوي EF (EF اصغر تماما AB لأنّ $[AB]$ وتر في المثلث القائم BAD و $(EF = DB)$.



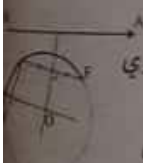
7. 1) بما أنّ (D_1) و (D_2) متقاطعان و (Δ_1) و (D_1) متوازيان فإنّ (Δ_1) و (D_2) متقاطعان.

ب) لأنشاء متوازي الأضلاع $MNOP$ ، يكفي تعيين النّقطة P من (D_1) التي صورتها النّقطة O بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة M إلى النّقطة N.



إرشادات وتوجيهات

- لإنشاء صورة قطعة مستقيم بانسحاب، ننشئ صورتي طرفيها بهذا الانسحاب ونصل بينهما.
- لإنشاء صورة مستقيم بانسحاب، يكفي أن ننشئ صورتي نقطتين منه بهذا الانسحاب، ثمّ نرسم المستقيم المعيّن بالصّورتين.
- لإنشاء صورة دائرة بانسحاب، يكفي أن ننشئ صورة مركزها بهذا الانسحاب، ثمّ نرسم الدائرة التي مركزها الصّورة وبنفس نصف القطر.
- لإنشاء صورة نصف مستقيم بانسحاب، ننشئ صورة المبدأ، وصورة نقطة أخرى منه بهذا الانسحاب، ثمّ نرسم نصف المستقيم المعيّن بالصّورتين.
- صورة مستقيم بالانسحاب الذي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة B (A و B متمايزتان.) هي مستقيم يوازيه.
- في التمرين 3 الجزء ب) $(O'X')//(OX)$ و (OY) قاطع لهما. $(O'Y')//(OY)$ و (OX) قاطع لهما.
- صورة زاوية بانسحاب هي زاوية تقايسها.
- لتعيين النّقطة O نعين نقطة B من هذه القوس تختلف عن النقطتين E و F، ثمّ نرسم محوري القطعتين $[BE]$ و $[BF]$ فيتقاطعان في النّقطة O.



- في التّمرين $\widehat{ADB} = 90°$ لأن المثلث ABD مرسوم في نصف دائرة O.
- المستقيم الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر.

الإجابة صحيح

الانسحاب (3)

الكفاءات المستهدفة • معرفة خواص الانسحاب وتوظيفها.

مكتسبات

- معرفة الانسحاب.
- إنشاء صور بعض الأشكال بانسحاب.

ما يلزمك معرفته

1 الشكل وصورته بانسحاب

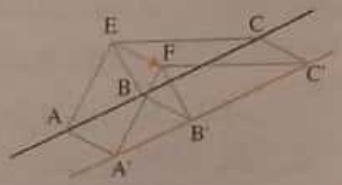
قابلان للتطابق مثال : الشكل 2 صورة الشكل 1 بالانسحاب الذي يحول A إلى B إنهما متطابقان.

للشكل وصورته بانسحاب نفس الأبعاد، ونفس المساحة، ونفس أقياس الزوايا.

ومنه بالانسحاب،

- صورة مستقيم هي مستقيم يوازيه.
- صورة قطعة مستقيم هي قطعة مستقيم تقايسها، وحاملاهما متوازيان.
- صورة زاوية بانسحاب هي زاوية تقايسها.

2 إذا كانت A، B، C ثلاث نقط في استقامية فإنّ صورها A'، B'، C' بانسحاب تكون في استقامية



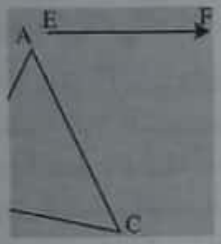
- إذا كان مستقيمان متوازيين فإنّ صورتيهما بانسحاب متوازيان أيضا.
- إذا كان مستقيمان متعامدين فإنّ صورتيهما بانسحاب متعامدان أيضا.

تمارين

1. أنشئ مثلّثا ABC متقايس الأضلاع، ثمّ أنشئ صورتيه : الأولى بالانسحاب الذّي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة B، والثانية بالانسحاب الذّي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة C.
أ) سمّ ADF المثلّث الناتج، وحدّد طبيعته.
ب) احسب مساحة المثلّث ADF بدلالة المثلث ABC.

2. RST مثلّث كيفي I منتصف [RT]. النّقطة J صورة النّقطة I بالانسحاب الذّي يحوّل النّقطة T إلى النّقطة S.
أ) أثبت أنّ الرّباعي STIJ متوازي أضلاع .
ب) نفس السؤال بالنّسبة إلى الرّباعي RISJ.

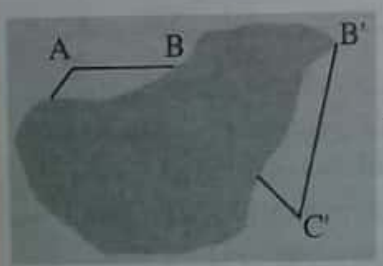
3. ABC مثلّث، وM منتصف [AB]. النّقطة E صورة النّقطة A بالانسحاب الذّي يحوّل النّقطة M إلى النّقطة C، والنّقطة F صورة النّقطة E بنفس الانسحاب.
أثبت أنّ النّقطة C منتصف [BF].



4. رسم رياض مثلّثا ABC فوقع رأسه B خارج حيز الورقة المستعملة. اشرح كيف سيرسم صورة المثلّث ABC بالانسحاب الذّي يحوّل النّقطة E إلى النّقطة F دون إكمال المثلّث ABC.

5. (C) دائرة قطرها[AB]، وM نقطة من (C) تختلف عن كلّ من A وB. النّقطة N صورة النّقطة M بالانسحاب الذّي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة M.
أنجز شكلا مناسبا، ثمّ بيّن أنّ المثلّث ABN متساوي السّاقين.

6. أنشئ مثلّثا ABC فيه AB = 5 cm و BC = 3,8 cm و CA = 5,6 cm علّم النّقطة D من [AB] بحيث AD = 2 cm، الموازي لـ (BC) الذّي يشمل النّقطة D يقطع [AC] في النّقطة E.
أ) احسب كلاّ من الطّولين AE وDE.
ب) النّقطة F صورة النّقطة B بالانسحاب الذّي يحوّل النّقطة A إلى النّقطة D، والنّقطة G صورة النّقطة C بنفس الانسحاب. المستقيم (AC) يقطع (AB) في النّقطة H.
1. بيّن أنّ النّقطة F تنتمي إلى (AB).
2. احسب الأطوال BF وFG وFH وCH.



7. الشكل يمثل رباعيًا ABCD وصورته A'B'C'D' بانسحاب، وقد مسح جزء منهما انقل ما بقي. من الشكل، ثمّ أكمله.

صحيح أم خطأ ؟ يوجد انسحاب واحد يحول أي شكل هندسي إلى شكل هندسي يقايسه.

حلول التمارين

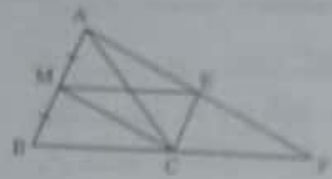
1. 1) بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع والمثلثين BDE و CEF صورتا ABC بالانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة B والانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة C على الترتيب فإن كلّ من النقط A و B و D والنقط A و C و F والنقط D و E و F في استقامية و $DF = 2BC$ ، $AD = 2AB$ ، $AF = 2AC$ أي $AF = AD = DF$ ، ومنه المثلث ADF متقايس الأضلاع.

ب) نرمز لمساحة المثلث ADF بـ $\mathcal{A}$ ولمساحة المثلث ABC بـ $\mathcal{A}_1$.

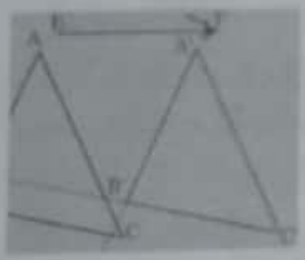
بما أن المثلثين BDE و CEF صورتا المثلث ABC بانسحاب وأن المثلثين BCE و ABC متناظرين بالنسبة إلى (BC)، فإن المثلثات ABC و BCE و CEF و BDE متقايسة ولها نفس المساحة ومنه $\mathcal{A} = 4\mathcal{A}_1$ (أي أن مساحة ADF هي أربعة أضعاف مساحة ABC)

2. 1) بما أنّ J صورة النقطة I بالانسحاب الذي يحول النقطة T إلى النقطة S، فإنّ القطعة [JS] صورة [IT] بالانسحاب الذي يحول T إلى S فهما متقايستان وحاملاهما متوازيان ومنه الرباعي STJI متوازي أضلاع.

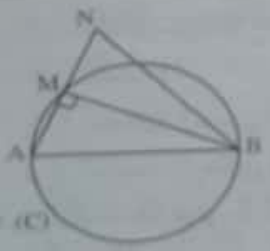
ب) بما أن القطعة [JS] صورة القطعة [IT] بالانسحاب الذي يحول T إلى S و I منتصف [RT]، فإن القطعتين [IR] و [JS] متقايستان وحاملاهما متوازيين ومنه الرباعي RISJ متوازي أضلاع.



3. بما أنّ E' صورة النقطة A و F صورة النقطة E بالانسحاب نفسه، فإنّ E منتصف [AF]. وبما أنّ E' صورة النقطة A و C صورة النقطة E بالانسحاب نفسه، فإنّ (AM)//(EC). إذن النقطة C منتصف ([BF] عكس نظرية مستقيم المنتصفين)



4. نفرض A'B'C' صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي يحول النقطة E إلى النقطة F. نشئ A' صورة الرأس A و C' صورة الرأس C بهذا الانسحاب ثم نرسم [A'C']. نرسم الموازي لحامل [AB] الذي يشمل A' والموازي لحامل [CB] الذي يشمل C'، فيتقاطعان في النقطة B'. إنّ B' هي صورة B بالانسحاب الذي يحول النقطة E إلى النقطة F.



5. المثلث ABM قائم الزاوية في النقطة M لأنّ وتره قطر في الدائرة (C)، وبما أن القطعة [MN] صورة القطعة [AM] بالانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة M فلهما نفس الحامل ومتقايستان أي $MN = AM$، ومنه (BM) محور [AN] وبالتالي فإنّ $BN = BA$ والمثلث ABN متساوي الساقين.

6. 1) حساب الطولين AE و DE

$\frac{FA}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ ومنه $\frac{AE}{5,6} = \frac{2}{5}$ إذن $AE = 2,24$

ب1) بما أن النقط A و D و B في استقامية، و F صورة النقطة B بالانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة D، فإن النقط A و D و B و F في استقامية، ومنه النقطة F تنتمي إلى (AB)

ب2) $BF = AD = 2cm$ ، $FG = BC = 3,8\ cm$ (لأن CBFG متوازي أضلاع)

$CH = 2,24\ cm$ ، $BF = FG = 5,32\ cm$

إرشادات وتوجيهات

- كلّ المثلثات ABC و BCE و CEF و BDE متقايسة ولها نفس المساحة

- للشكل وصورته بانسحاب نفس الأبعاد، ونفس المساحة

- صورة قطعة مستقيم هي قطعة مستقيم تقايسها وحاملاهما متوازيان

- في التمرين 1 $EA = EF = MC$ و $(EA)//(EF)//(MC)$، ومنه فإنّ E منتصف [AF].

- في التمرين 1 يمكن البرهان على أن $BC = CP$ و $(BC)//(CF)$ باستعمال خواص الانسحاب ومتوازي الأضلاع ثمّ استخلاص أنّ C منتصف [BF].

- (BM) هو محور القطعة [AN] ومنتصف الضلع [AN]، والارتفاع المتعلق بالضلع [AN]

- في التمرين 6 المستقيمان (BC) و (DE) متوازيان و (AC) و (AB) قاطعان لهما ما يسمح لنا بتطبيق نظرية طاليس

- في التمرين 6 نحسب FH من: $\frac{BC}{FH} = \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AH}$ ومنه

$FH = \frac{3,8 \times 9}{7} = 5,32$

كما نحسب AH من نفس العلاقة السابقة ونستنتج CH من: $CH = AH - AC$

الهرم ومخروط الدوران

الكفاءات المستهدفة

• وصف هرم ومخروط الدوران وتمثيلهما.

تمارين

1. سمِّ كلاًّ من الأشكال 1 و 2 و 3 ، واذكر عناصر كلّ منها.

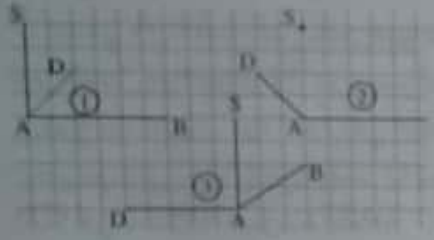
2. 1) ما هو المجسّم المولّد في كلّ من الحالتين الآتيتين :

الحالة (1) : دوران مثلث قائم حول أحد ضلعيه القائمين.

الحالة (2) : دوران مستطيل حول أحد أضلاعه.

ب) اذكر الأجزاء من الشكل التي تولّد عناصر المجسّم الناتج.

3. كلّ من الأشكال 1 و 2 و 3 أدناه هو بداية تمثيل هرم رأسه S، وقاعدته مستطيل ABCD باستعمال تقنية المنظور متساوي القياسات. انقل هذه الأشكال على ورقة مسطّرة، وأتمّمها.



4. الشكل المرفق هو بداية لرسم مخروط دوران رأسه S ينتمي إلى المستقيم (D).
أكمل رسم هذا المخروط، واشرح الطّريقة المتّبعة.

5. لأميرة لعبة على شكل هرم منتظم رباعي الوجوه، رسمت لها باستعمال تقنية المنظور متساوي القياسات الرّسومات المرفقة أدناه.
حدّد في كلّ حالة عنصر الهرم الذي كان مقابلا لأميرة أثناء الرّسم.

6. باستعمال تقنية المنظور متساوي القياسات ارسم تمثيلا للمجسّم المعيّن في كل مما يأتي :
1) هرم منتظم قاعدته مربّع طول ضلعه 4 cm ، وارتفاعه 5 cm.
ب) مخروط دوران نصف قطر قاعدته 2,5 cm، وارتفاعه 4 cm.

مكتسبات

• التمثيل بالمنظور المتساوي القياسات.
• حساب محيط ومساحة مضلّعات مألوفة.

ما يلزمك معرفته

1. الهرم

الهرم هو مجسّم له :
• قاعدة في شكل مضلّع.
• وجوه جانبية في شكل مثلثات لها رأس مشتركة هي رأس الهرم.

2. الهرم المنتظم

نقول عن هرم إنّه منتظم إذا كانت :
• قاعدته مضلّع منتظم.
• وارتفاعه يشمل مركز قاعدته.

• الوجوه الجانبية للهرم المنتظم هي مثلثات كلّ منها متساوي الساقين رأسه الأساسي رأس الهرم.

مثال : SABCD
هرم منتظم قاعدته مربع الارتفاع [SH] يشمل مركز القاعدة.

3. مخروط الدوران

مخروط الدوران هو مجسّم له :
• قاعدة في شكل قرص.
• ارتفاع ينتمي إلى العموديّ على القاعدة في مركزها.
• وجه جانبي غير مستوٍ في شكل قطاع قرص مركزه رأس المخروط.

أصحيح أم خطأ ؟

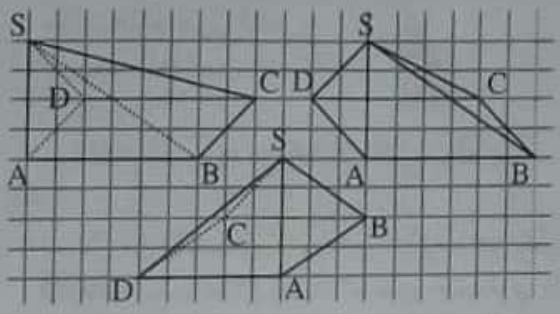
إذا كان ارتفاع هرم يشمل رأسا من رؤوس قاعدته فإنّ هذا الهرم غير منتظم.

حلول التمارين

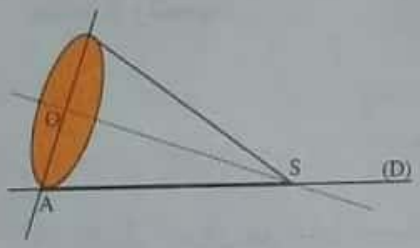
1. الشكل (1) اسطوانة دوران، ارتفاعها h ونصف قطر قاعدتها r.
الشكل (2) مخروط الدّوران نصف قطر قاعدتها r، ورأسه، وارتفاعه SO.
الشكل (3) هرم قاعدته المثلث ABC ورأسه S وارتفاعه SH.

2. المجسّم المولّد في الحالة (1) هو مخروط الدّوران قاعدته القرص ذو المركز C ونصف القطر BC ورأسه A وارتفاعه AC.
المجسّم المولّد في الحالة (2) هو أسطوانة الدّوران قاعدتاها القرصان الذان مركزاهما A وD ونصفا قطرهيما CD وAB $(AB = CD)$ وارتفاعها AD.
ب) في الشكل الأول [BC] : تولد القاعدة، [AB] تولد السطح الجانبي.
في الشكل الثاني [AB] : و[CD] تولدان القاعدتين، [BC] تولد السطح الجانبي.

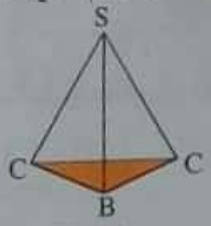
3. إتمام الأشكال المعطاة انتبه إلى التّوازي والتّقايس وكذا الخطوط التي ترسم متقطعة.



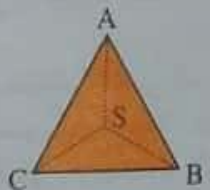
4. نسمي A النّقطة التي يمس فيها المستقيم (D) حدّ القرص ذي المركز O، ثمّ نرسم المستقيم (OA) فيقطع حدّ القرص مرّة أخرى في النّقطة A' نرسم العمودي على [AO] في النّقطة O فيقطع المستقيم (D) في النّقطة S، ونرسم [AS].



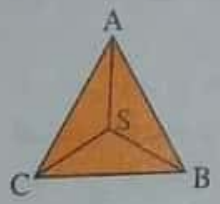
5. عنصر الهرم الذي كان مقابلا لأميرة أثناء الرّسم :



في الشكل (1) الحرف [SB]

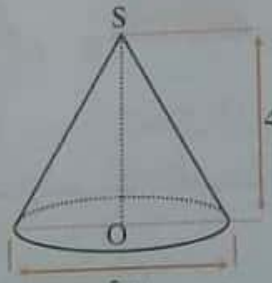


في الشكل (2) القاعدة ABC

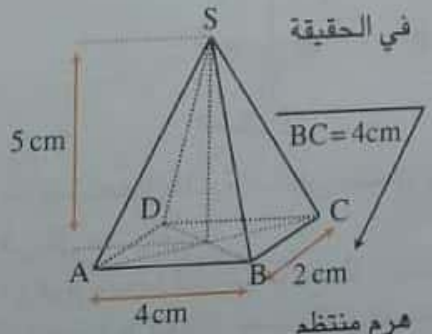


في الشكل (3) الرأس S

6.



مخروط دوران



هرم منتظم

إرشادات وتوجيهات

- لمخروط الدّوران قاعدة وراس وارتفاع وسطح جانبي.
- للهرم قاعدة ورأس وارتفاع وأحرف، وأوجه جانبية.
- لأسطوانة الدّوران قاعدتان دائرتان متوازيتان وارتفاع وسطح جانبي مغلق.
- باستعمال تقنية المنظور متساوي القياسات.
- إذا كانت قاعدة الهرم مربّعا أو مستطيلا فهي ترسم متوازي أضلاع.

الإجابة صحيح.

45 الهرم ومخروط الدوران (2)

الكفاءات المستهدفة

- إنجاز تصميم للهرم ولمخروط الدوران.
- صنع هرم ومخروط الدوران أبعادهما معلومة.

مكتسبات

- وصف هرم ومخروط الدوران وتمثيلهما.

ما يلزمك معرفته

1 تصميم مجسم : هو مخطط يمكّن من انجاز هذا المجسّم بالقصّ والطّي.

- تصميم مخروط الدوران

$\alpha = \frac{r}{a} \times 360$

r : نصف قطر القاعدة.

a : طول مولد المخروط.

α : زاوية تحصر قوسا طولها يساوي محيط قاعدة المخروط.

- تصميم هرم منتظم قاعدته مثلث

عند تركيب المجسّم يشكل الجزء غير الملوّن وجوهه الجانبية.

- تصميم هرم منتظم قاعدته مربع

(انظر التمرين الأول)

2 لصنع مخروط الدوران علم نصف قطر قاعدته r، وارتفاعه h يمكن إتباع ما يأتي:
(انظر التمرين 4)

1) نحسب a طول مولّده.
2) ننجز تصميما له بالأبعاد المعطاة.
3) نقص التّصميم النّاتج ونلصق الأجزاء النّاتجة باستعمال الشريط اللاصق.

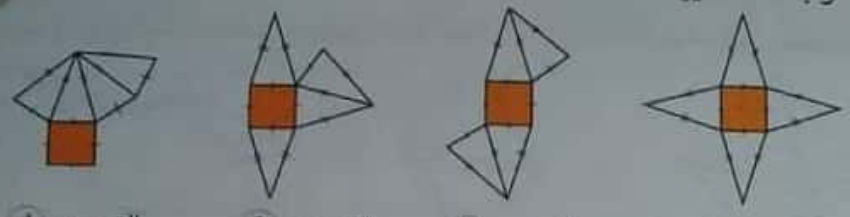
3 لصنع هرم منتظم أبعاده معلومة يمكن إتباع ما يأتي:

1) ننجز له تصميما بالأبعاد المعطاة.

2) نقصّ التّصميم النّاتج ونلصق الأجزاء النّاتجة باستعمال الشريط اللاصق.

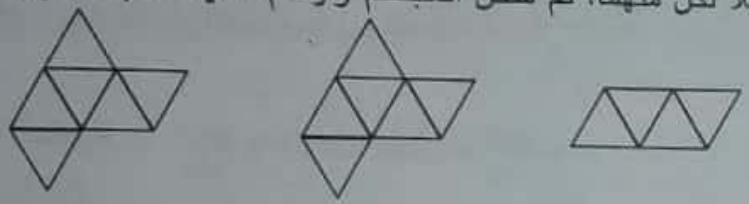
تمارين

1. التّصاميم الآتية لهرم منتظم قاعدته مربّع، ولكنّ في أحدها خطأ. مطلوب منك تعيينه.



التصميم 1 — التصميم 2 — التصميم 3 — التصميم 4

2. الأشكال الآتية مكوّنة من مثلّثات متقايسة الأضلاع طول ضلع كلّ منها 4 cm، وهي تصاميم لمجسّمات.
أنجز مثيلا لكلّ منهما، ثمّ شكّل المجسّم وارسم تمثيلا له بالمنظور متساوي القياس.



الشكل 1 — الشكل 2 — الشكل 3

3. أنجز تصميما لهرم منتظم قاعدته مثلّث محيطه 21cm، وطول حرفه 7 cm، ثمّ ركّب الهرم الناتج.

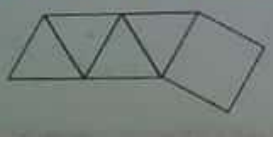
4. كلّ من الأشكال أدناه هو تصميم لمخروط دوران مرسوم باليد الحرّة. أعد رسمها بدقّة بعد حساب المجهول فيها.

الشكل 1 — الشكل 2 — الشكل 3

5. أنجز تصميما لمخروط دوران قطر قاعدته 5 cm، وطول حرفه 6 cm، ثمّ ركّب مخروط الدوران النّاتج.

6. أنجز تصميما لمخروط دوران قطر قاعدته 6 cm، وارتفاعه 4 cm، ثمّ ركّب المخروط دوران النّاتج.

أصحيح أم خطأ ؟ الشكل المقابل هو تصميم لهرم منتظم قاعدته مربّع.



حلول التمارين

1. التصميم 3 هو الذي فيه خطأ: عند التركيب نجد إحدى الوجوه الجانبية في غير مكانه

2. بعد تشكيل المجسّمات نرسم تمثيلاً لكلّ منها بالمنظور متساوي القياس، فنجد أشكالاً مثل ما يأتي:

المجسم 1 المجسم 2 المجسم 3

3. تصميم هرم منتظم قاعدته مثلث محيطه 21 cm.

قاعدة الهرم مثلث متقايس الأضلاع، طول ضلعه 7 cm.

4. في الشكل 1 : $r = \frac{9 \times 60}{360} = 1,5cm$ ومنه $r = \frac{a \times \alpha}{360^\circ}$

في الشكل 2 : $\alpha = \frac{2}{8} \times 360^\circ = 90^\circ$ ومنه $\alpha = \frac{r}{a} \times 360^\circ$

في الشكل 3 : $a = \frac{1}{60} \times 360^\circ = 6\ cm$ ومنه $a = \frac{r}{\alpha} \times 360^\circ$

5. نحسب زاوية الرّأس S لتحديد السّطح الجانبي

$\alpha = \frac{r}{a} \times 360^\circ = \frac{2,5}{6} \times 360^\circ = 150^\circ$

ثمّ نقص ونلصق باستعمال شريط لاصق.

6. نحسب طول حرفه a من العلاقة

$a^2 + r^2 + h^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

ومنه $a = 5$

وبالتالي فإنّ زاوية الرّأس S : $\alpha = \frac{3}{5} \times 216^\circ$

إرشادات وتوجيهات

- إنجاز مثيل لكلّ منها يكون على ورق مقوّى، ليسهل تشكيل المجسّم يمكن استعمال الشّريط اللاّصق لشدها.
- من العلاقة : $\alpha = \frac{r}{a} \times 360^\circ$ نستنتج ما يأتي:

$r = \frac{a \times \alpha}{360^\circ}$

$a = \frac{r}{\alpha} \times 360^\circ$

- في التّمرين 4 الرسم منجز بمقياس
- لاحظ نوع المثلّث الذي أطوال أضلاعه a، r، h ثمّ جد علاقة لحساب a

الكفاءات المستهدفة

* حساب حجم كل من الهرم ومخروط الدوران.

مكتسبات

- وصف هرم ومخروط الدوران وتمثيلهما.

ما يلزمك معرفته

1. حجم الهرم

حجم الهرم يساوي ثلث جداء مساحة قاعدته وارتفاعه.

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

حيث :

$\mathcal{B}$ مساحة القاعدة، و h ارتفاع الهرم.

2. حجم مخروط الدوران

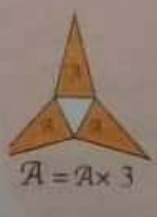
حجم مخروط الدوران يساوي ثلث جداء مساحة قاعدته وارتفاعه.

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$
$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r \times h$$

3. المساحة الجانبية

)المساحة الجانبية لهرم منتظم تساوي جداء عدد أضلاع قاعدته ومساحة أحد وجوهه الجانبية.

)المساحة الجانبية لمخروط الدوران تساوي جداء العدد وطول مولده، ونصف قطر قاعدته.



$\mathcal{A} = \mathcal{A} \times 3$

$\mathcal{A} = \pi a r$

تمارين

1. هرم قاعدته على شكل مستطيل بعداها a و b، وارتفاعه h (انظر الشكل).

أ) احسب حجمه V بدلالة a و b و h.

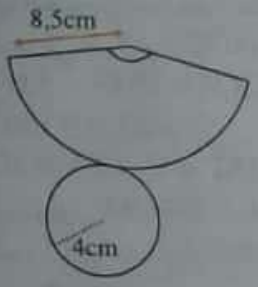
ب) أكمل الجدول الآتي المتعلق بهذا الهرم.

a عرض القاعدة	7 cm	...	12 cm
b طول القاعدة	10 cm	4 m	...
$\mathcal{B}$ مساحة القاعدة	...	14,4 m^2	...
h ارتفاع الهرم	9,4 cm	...	125 cm
V حجم الهرم	...	103, 68 m^3	111 dm^2

2. هرم منتظم ارتفاعه 8,5 cm ، وقاعدته مستطيل طوله 5,4 cm وعرضه 2,5 cm احسب حجمه، ومساحته الكلية (تعطى القيم مدورة إلى 0,01).

3. هرم منتظمة قاعدته، سداسيّ، طول ضلعه 5,6 cm، وطول حرفه 10,6. احسب حجمه، ومساحته الكلية.

4. الشكل هو تصميم لمخروط دوران نصف قطر قاعدته 4 cm، وطول حرفه 8,5 cm.

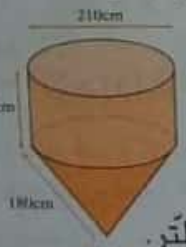


أ) نرمز لارتفاعه بـ : h ، احسب h.

ب) احسب مساحته الكليّة بأخذ $\pi = 3,4$.

ج) احسب حجمه بالتدوير إلى 0,01.

5. خزان ماء مغطّى مكوّن من جزأين : اسطوانة دوران قطر قاعدتها 210 cm ، وارتفاعها 105 cm، وهرم له نفس قاعدة الأسطوانة وطول مولّده 180 cm. كما هو مبيّن في الشكل المرافق.

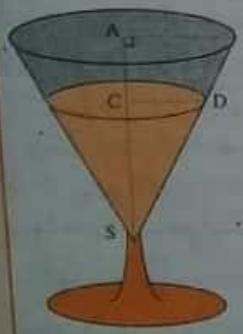


أ) أنجز تصميما لهذا الخزان بمقياس $\frac{1}{30}$.

ب) إذا علمت أنّ المتر المربّع من الحديد الخاصّ بخزانات الماء يكلف 400 DA ؟ احسب تكلفة هذا الخزان.

ج) احسب سعة هذا الخزان بالسنتيمتر المكعّب، ثمّ باللتر.

6. الشكل يمثّل كوبا على شكل مخروط دوران قاعدته نصف قطره AB = 3 cm، وارتفاعه SA = 10 cm. سكب فيه سائل حتى النقطة C حيث SC = 6 cm.



أ) احسب القيمة المضبوطة لحجم هذا الكوب.

ب) احسب القيمة المضبوطة لحجم السائل الموجود في الكوب.

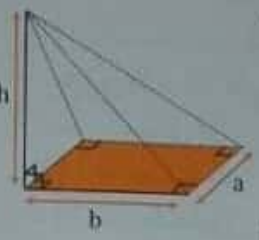
ج) احسب نسبة حجم السائل إلى حجم الكوب.

صحيح أم خطأ ؟ طول القوس الذي يحدّ السطح الجانبي لمخروط الدوران يساوي محيط قاعدته.

حلول التمارين

1. 1) حساب الحجم V بدلالة a و b و h. بما أنّ قاعدة الهرم مستطيلة الشكل بعداها a و b فإنّ مساحة قاعدته تعطى بالعلاقة $\mathcal{A} = a \times b$

ومنه $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h = \frac{1}{3} a b h$



ب)

عرض القاعدة a	7 cm	3,6 m	12 cm
طول القاعدة b	10 cm	4 m	74 cm
مساحة القاعدة	70 cm^2	14,4 m^2	888 cm^2
ارتفاع الهرم h	9,4 cm	21,6 m	125 cm
حجم الهرم V	658 cm^3	103, 68 m^3	111 dm^2

2. لتكن $\mathcal{A}_1$ مساحة قاعدة الهرم لدينا $\mathcal{A}_1 = 5,4 \times 2,5 = 13,5\ cm^2$

ومنه حجمه $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h = \frac{1}{3} \times 13,5 \times 8,5 = 38,25\ cm^3$

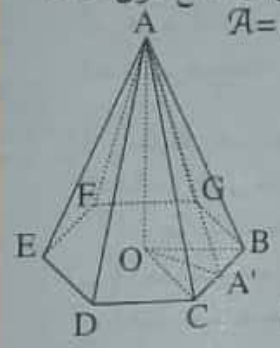
3. لتكن $\mathcal{A}$ مساحة قاعدة الهرم فإنّها، تساوي 6 مرات مساحة مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه (5,6 cm انظر عمود الارشادات.) ومنه $\mathcal{A} = 6 \times \frac{1}{2}(4,85 \times 5,6) = 81,48\ cm^2$

لحساب الحجم والمساحة الكلية نحتاج إلى AO و AA'

نحسبهما في المثلثين AOC و AOA' القائمين في O.

$AO^2 = AC^2 - OC^2 = 10,6^2 - 5,6^2 = 81$

ومنه $AO = 9\ cm^3$



ومنه $AA' = 10,22$ cm ومنه $AA'^2 = AO^2 + OA'^2 = 9 + 4,85 = 104,52$

الحجم يساوي $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h = \frac{1}{3} \times 81,48 \times (9) = 244,44$

المساحة الكلية تساوي $\mathcal{A} = 6 \times (\frac{1}{2} \times 10,22 \times 2,8) + \mathcal{A} = 167,328\ cm^2$

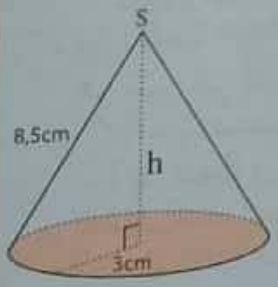
4. 1) لدينا $h^2 + 4^2 = 8,5^2$ ومنه $h^2 = 65,25$، أي $h = 7,5$ cm

ب) حساب المساحة الكلية

$\mathcal{A} = 8,5 \times 4 \times \pi + 4^2 \times \pi = 50 \times 3,14 = 157\ cm^2$

ج) حساب الحجم

$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times (4^2 \times 3,14) \times 8,5 = 142,35\ cm^2$



5. 1) التصميم (انظر عمود الارشادات)

ب) ليكن h إرتفاع الهرم لدينا $h^2 + 105^2 = 180^2$ ومنه $h = 146,20$ cm

المساحة الكلية للخزان

$\mathcal{A} = 2 \times 105^2 \times \pi + 105^2 \times \pi + 180 \times 105 \times \pi = 163201,5 cm^2$

$\mathcal{A} = 16,32\ m^2$ ؛ كلفة الخزان $16,23 \times 400 = 6\,528$ DA

ج) سعة هذا الخزان هي سعة الأسطوانة زائد سعة الهرم.

$V = 105^2 \pi \times 146,2 + \frac{1}{3} 105^2 \pi \times 146,2$ ومنه $V = 5322017,4\ cm^3 = 5322,0174l$

6. 1) حجم الكوب $v = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 10 = 30\pi\ cm^3$

ب) لحساب حجم السائل نحسب أولا CD. لدينا حسب نظرية طاليس

$\frac{SC}{SA} = \frac{CD}{AB}$ ومنه $CD = \frac{SC \times AB}{SA}$ أي أن $CD = \frac{6 \times 3}{10} 1,8$ cm

$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times 1,8^2 \times 6 = 6,48\ cm^3$

ج) حساب نسبة حجم السائل إلى حجم الكوب : $P = \frac{V_1}{V} = \frac{6,48\pi}{30\pi} = 0,216$

الإجابة صحيح.

إرشادات وتوجيهات

- مساحة مستطيل تساوي جداء بعديه.
- حجم الهرم يساوي ثلث جداء مساحة قاعدته وارتفاعه.
- من العلاقة $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h = \frac{1}{3} a b h$

نجد $a = \frac{3 \times V}{b \times h}$ و $b = \frac{3 \times V}{a \times h}$

و $h = \frac{3 \times V}{a \times b}$ و $\mathcal{A} = \frac{3 \times V}{h}$

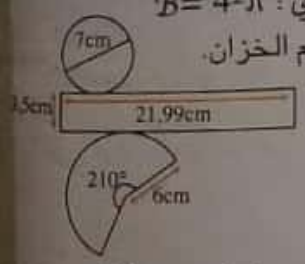
- في التمرين 3 : قاعدة الهرم مؤلفة من 6 مثلثات كلّ منها متقايس الأضلاع طول ضلعه 5,6 cm وارتفاعه يحسب من العلاقة :

$OA'^2 = OB^2 - A'B^2$

$OA'^2 = 5,6^2 - 2,8^2 = 23,25$

$AO' = 4,58$ cm

- مساحة المثلث هي نصف جداء القاعدة والارتفاع.
- المساحة الكلية هي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدة.
- المساحة الجانبية لهرم منتظم تساوي جداء عدد أضلاع قاعدته ومساحة أحد وجوهه الجانبية.
- في التمرين 4 : مساحة القاعدة تساوي : $\mathcal{B} = 4^2\pi$ تصميم الخزان.



- القيمة $30\pi\ cm^3$ هي قيمة مضبوطة للحجم V. وبتعويض π بالقيمة 3,14 تصبح $V = 94,2\ cm^3$ وهي قيمة مقربة.